# Ejercicios de Lógica

**Notas**

- Puede ser que, por error, algunos ejercicios (o partes de ellos) estén escritos en inglés; en este caso, ¡no debería ser demasiado difícil entenderlos y resolverlos!
- Puede haber errores de todo tipo en el texto de los ejercicios, especialmente en los que se han traducido del inglés; por favor, ten paciencia.
- Incluso es posible que encuentres el mismo ejercicio (o parte de él) dos a más veces.
- Básicamente, cada vez que se te pide demostrar que un conjunto es (in)satisfacible, puedes repetir el ejercicio usando todas la técnicas que conoces; por lo tanto, muchos ejercicios se pueden resolver varias veces aplicando herramientas distintas.
- Se puede sacar la forma clausular de cualquier fórmula que aparece aquí, no sólo de las que aparecen en la sección que correspondiente.

# 1 Lógica Proposicional: Semántica

**Ejercicio 1** *Comprueba la corrección de la siguiente deducción considerando todas las interpretaciones posibles:*

$$\{p \vee (q \wedge r),\ p \rightarrow \neg q,\ \neg p \rightarrow \neg r\} \models p$$

*¿Por qué no ha sido necesario especificar el dominio de las interpretaciones?*

## 2 Lógica de Primer Orden: Semántica

**Ejercicio 2**

1. *¿Pertenece* 5 *al siguiente conjunto?*

$$X = \{n' \in \mathbf{N} \setminus \{n'' \mid n'' \leq 4\} \mid n' \text{ es más grande que } 7 \text{ cuando es par}\}$$

2. *¿qué se puede decir de* 6*?*
3. *¿y de* 8
4. *¿cómo se escribiría* $p_X(m) =$ *"m pertenece a* $X$*" como una fórmula lógica?*
5. *por qué no se ha especificado de qué conjunto se toma* $n''$ *en* $\{n'' \mid n'' \leq 4\}$*?*

**Ejercicio 3 (04/2009)** *Sean $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$, $G$ fórmulas de un lenguaje de primer orden sobre las que sólo sabemos lo siguiente (se note que no sabemos nada de $E$):*

*$A$ es una tautología*
*$D$ es la negación de $C$*
*$B$ es insatisfacible*
*$F$ es falsa para una interpretación concreta $I$*
*existen modelos y también contramodelos para $C$*
*$G$ es verdadera para la misma $I$*

*Para cada una de las siguientes afirmaciones marcar la respuesta SI si se cree que es correcta, NO si se cree que es incorrecta, o DESC si con la información proporcionada no se puede saber (nota: la validez implica la satisfacibilidad).*

| | |
|---|---|
| *1* | *$D \wedge C$ es verdad para la interpretación concreta $I$* |
| *2* | *$A \wedge E$ es satisfacible pero no es válida* |
| *3* | *no existe ningún modelo para $A \wedge C$* |
| *4* | *$D \rightarrow C$ es verdad para la interpretación concreta $I$* |
| *5* | *$A \wedge ((G \wedge \neg C) \rightarrow (D \wedge G))$ es verdad para la interpretación concreta $I$* |
| *6* | *$A \wedge (B \vee G)$ es válida* |
| *7* | *$G \vee B$ tiene modelos* |
| *8* | *$F \vee (A \wedge C)$ es verdad para la interpretación concreta $I$ pero no es válida* |
| *9* | *la negación de $A \wedge C \rightarrow B$ es válida* |
| *10* | *$F \rightarrow (G \vee E)$ es satisfacible* |

**Solución 1**

*1 NO ($D = \neg C$ implica que $C$ y $D$ no comparten modelos)*
*2 DESC (no tenemos información sobre $E$)*
*3 NO (existen modelos de $C$, y son también modelos de $A$)*
*4 DESC (no sabemos nada de $C$ y $D$ con $I$)*
*5 SI ( $A$ tiene solo modelos, y la implicación es verdad en los dos casos ($C$ verdadero y $D$ falso, o al revés) porque $G$ es verdad en $I$)*
*6 DESC (sabemos que $G$ es satisfacible pero no sabemos si es válida (y tiene que serlo para que $A \wedge (B \vee G)$ sea válida)*
*7 SI ($I$ es un modelo)*
*8 DESC (la fórmula es satisfacible, pero no sabemos si $I$ es un modelo)*
*9 NO (es como decir que $A \wedge C \rightarrow B$ es insatisfacible, pero hay contramodelos para $C$, así que hay modelo para toda la fórmula)*
*10 SI ($G$ tiene modelos ($I$))*

**Ejercicio 4 (02/2008)** *Sean $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$, $G$ fórmulas definidas en el mismo lenguaje de primer orden. Lo siguiente es la información que tenemos sobre ellas*

- *$A$ es una tautología*
- *$B$ es una contradicción*
- *$C$ es satisfacible*
- *$D$ es la negación de $C$*
- *no se sabe nada de $E$*
- *$F$ es falsa para la interpretación concreta $I$*

- *$G$ es falsa para la interpretación concreta $I$*

*Para cada afirmación, decir SÍ, NO o DESC (si no se puede decir con la información proporcionada):*

1. *$D \wedge C$ es verdad para la interpretación concreta $I$*
2. *$F \rightarrow G$ es satisfacible*
3. *$A \wedge C$ es satisfacible*
4. *$A \wedge C$ es verdad para la interpretación concreta $I$*
5. *$D \rightarrow C$ es verdad para la interpretación concreta $I$*
6. *$D \vee C$ es verdad para la interpretación concreta $I$*
7. *$A \wedge B$ es satisfacible*
8. *$A \wedge E$ es satisfacible*
9. *$G \wedge F$ es satisfacible*
10. *$A \wedge C \rightarrow B$ es una contradicción*

## 3 Lógica de Primer Orden: Formalización

**Ejercicio 5** *Considerar el siguiente alfabeto:*

- *símbolos de variable:* $x$, $y$, $z$
- *símbolos de constante:* $a/0$, $b/0$, $c/0$, $d/0$, $e/0$
- *símbolos de predicado:* $p_f/1$, $p_m/1$, $q_m/2$, $=/2$, $p_r/3$

*Formalizar las frases siguientes con lógica de primer orden:*

1. $a$ *es* $p_m$
2. $c$ *es* $p_f$ *o* $d$ *es* $q_m$ *con* $b$
3. $c$ *es* $p_f$ *o* $d$ *es* $q_m$ *con uno entre* $b$ *y* $e$
4. $a$, $b$, $c$ *están relacionados por* $p_r$ *en al menos una forma, donde* $a$ *aparece antes de* $c$ *en la tripla*
5. *si* $b$ *es* $p_f$, *entonces uno entre* $a$ *y* $b$ *es* $p_f$ *y* $p_m$
6. $c$ *es* $q_m$ *con* $e$, *en las dos direcciones (es decir,* $c$ *es* $q_m$ *con* $e$, *y* $e$ *es* $q_m$ *con* $c$*)*
7. $a$, $b$ *y* $e$ *son todos distintos*
8. $a$ *y* $b$ *son los dos* $q_m$ *con alguien, y* $a$ *siempre aparece primero en el par (es decir, que* $a$ *es* $q_m$ *con alguien, no que alguien es* $q_m$ *con* $a$*)*
9. *todos los predicados con aridad al menos dos con comutativos (no es primer orden...)*
10. *alguien es* $p_f$ *preo no* $q_m$ *con otro (en nignuna dirección)*
11. *dos individuos iguales son* $p_r$ *con al menos otro (que sería el tercer elemento de la tripla) que es distinto de ellos*
12. *sólo hay un individuo que es* $p_f$ *y también* $p_m$

**Ejercicio 6** *Traducir las fórmulas siguientes en palabras (hay muchas posibilidades):*

1. $q_m(a, d)$
2. $p_f(a)$
3. $p_r(a, b, c) \vee p_r(b, a, c)$
4. $p_f(a) \vee p_f(b)$
5. $q_m(a, b) \rightarrow p_m(a) \wedge p_m(b)$
6. $\forall xy(q_m(x, y) \rightarrow p_m(x) \wedge p_m(y))$
7. $q_m(x, y) \rightarrow p_m(x) \wedge p_m(y)$
8. $\forall x(a = x)$
9. $\exists x p_f(x)$
10. $\exists x p_f(x) \vee \forall y(\neg p_f(y))$
11. $\forall x(p_f(x) \vee p_m(a))$
12. $\neg \exists y(\forall x p_r(x, c, y))$
13. $\exists xy(q_m(x, x) \wedge q_m(y, y) \wedge (\forall z(q_m(z, z) \rightarrow z = x \vee z = y)))$
14. $\forall x \forall x' \forall x''(= (x, x') \wedge = (x', x'') \rightarrow x'' = x)$

## 4 Estardarización de fórmulas

**Ejercicio 7 (09/1993)** *Dado el conjunto de fórmulas $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$, siendo:*

$$\begin{aligned}
&A_1 : \forall z \exists x((\neg P(z) \vee \exists y Q(x,y,z)) \wedge (\neg R(z) \vee \neg P(x)))\\
&A_2 : \exists z S(z) \to \forall z T(z)\\
&A_3 : \forall z \forall x (T(z) \to P(x))\\
&A_4 : \exists z \forall y (\neg \exists x Q(z,x,y) \wedge S(y) \wedge R(z))
\end{aligned}$$

*donde $x$, $y$, $z$ son símbolos de variable, expresarlas en forma clausular.*

**Solución 2** *Véase los ejercicios resueltos de Luís Iraola.*

**Ejercicio 8 (09/1994)** *Obtener la forma clausular de cada una de las fórmulas siguientes:*

$$\begin{aligned}
&A_1 : \exists x(\exists y A(x,y) \to \neg \forall z (B(x,z) \wedge C(z)))\\
&A_2 : \neg(\exists x A(x) \wedge \neg \exists y \forall x C(x,y))
\end{aligned}$$

**Ejercicio 9 (02/1994)** *Obtener la forma clausular de la fórmula:*

$$\forall x (\exists y P(x,y) \vee \neg \forall y (Q(y) \to \exists x R(y,x)))$$

**Ejercicio 10 (09/1997)** *Conocidas las fórmulas:*

$$\begin{aligned}
&P_1 : \forall x \forall y (M(x,y) \to Z(x,y))\\
&P_2 : \forall x \forall y (V(x) \to M(x,y))\\
&P_3 : \forall x \forall y \forall z (Z(x,y) \wedge Z(y,z) \to Z(x,z))\\
&P_4 : \forall x \forall y (L(x) \wedge B(y) \to Z(x,y))\\
&P_5 : \forall x \forall y (B(x) \wedge P(y) \to Z(x,y))\\
&P_6 : \forall x (P(x) \to V(x))
\end{aligned}$$

1. *Obtener el conjunto de cláusulas correspondiente a la fórmula $P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge P_4 \wedge P_5 \wedge P_6$.*
2. *Obtener el conjunto de cláusulas necesario para estudiar la corrección de $T[P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6] \vdash Q$, siendo*

$$Q : \forall x \forall y (\exists z B(z) \wedge L(x) \wedge P(y) \to Z(x,y))$$

**Ejercicio 11 (09/1998)** *Sea $\{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}$ el conjunto de fórmulas siguiente:*

$$\begin{aligned}
&A_1 : \forall x \exists y (A(x,y) \to B(x) \wedge C(y))\\
&A_2 : \neg \forall y C(y)\\
&A_3 : \forall x (B(x) \to \exists x \exists y \neg D(x,y))\\
&A_4 : \forall x \neg E(x)\\
&A_5 : \forall x \forall y D(x,y) \vee \exists x E(x)
\end{aligned}$$

*Construir el conjunto de cláusulas correspondientes a las fórmulas anteriores.*

**Solución 3** *Véase los ejercicios resueltos de Luís Iraola.*

**Ejercicio 12 (09/1998)** *Sea $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ el conjunto de fórmulas siguiente:*

$$\begin{aligned}
&A_1 : \exists x B(x)\\
&A_2 : \forall x \forall y (C(x,y) \to D(x) \wedge B(x))\\
&A_3 : \exists x \forall y C(x,y)\\
&A_4 : \neg \exists x \exists y (D(x) \wedge \neg A(y))
\end{aligned}$$

*Construir el conjunto de cláusulas correspondiente a las fórmulas anteriores.*

**Ejercicio 13 (06/1998)** *Sea $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ el conjunto de fórmulas siguiente:*

$$\begin{aligned}
&A_1 : R(b) \wedge G(b) \wedge R(a)\\
&A_2 : \forall x (M(x) \to (G(x) \to P(x)) \wedge (\neg G(x) \to \neg P(x)))\\
&A_3 : \forall x (R(x) \to M(x))\\
&A_4 : \neg \exists x (R(x) \wedge \neg D(x))
\end{aligned}$$

*Construir el conjunto de cláusulas correspondientes a las fórmulas anteriores.*

**Ejercicio 14 (02/1999)** *Sea $\{A_1, A_2, A_3\}$ el conjunto de fórmulas de un enunciado.*

$$\begin{array}{l} A_1 : \exists y \forall x (A(x,y) \to B(x) \wedge D(x,y)) \\ A_2 : \forall x (B(x) \to \exists y \neg D(y,x) \vee E(x)) \\ A_3 : \forall x \neg E(x) \end{array}$$

*Construir el conjunto de cláusulas correspondientes a las fórmulas del enunciado.*

**Ejercicio 15 (06/1999)** *Construir el conjunto de cláusulas correspondiente al conjunto de fórmulas $\{A_1, A_2, A_3\}$:*

$$\begin{array}{l} A_1 : \exists x \forall y (A(x) \to B(x) \wedge (C(y) \wedge D(x,y))) \\ A_2 : \forall x \exists y (A(y) \wedge D(x,y)) \\ A_3 : \neg \exists x \forall y (\neg C(x) \vee (B(a) \wedge D(x,y))) \wedge \neg \exists x A(x) \end{array}$$

**Ejercicio 16 (09/1999)** *Dadas las siguientes fórmulas:*

$$\begin{array}{l} F_1 : \forall x (\forall y (A(x,y) \vee B(y)) \to C(x) \vee D(x)) \\ F_2 : \forall x \exists y (C(y) \to A(y,x)) \\ F_3 : \forall x (B(x) \vee D(x)) \\ F_4 : \forall x \forall y \neg (\neg A(x,y) \to D(x) \vee D(y)) \end{array}$$

*Poner la fórmula $F_1 \wedge F_2 \wedge F_3 \wedge F_4$ en forma clausular.*

**Solución 4** *Véase los ejercicios resueltos de Luís Iraola.*

**Ejercicio 17 (09/2000)** *Dado un lenguaje en el que $x$ e $y$ son símbolos de variables y $A$, $B$, $C$, $D$, $E$ de predicados unarios, se plantea la teoría cuyos axiomas no lógicos son las tres fórmulas siguientes:*

$$\begin{array}{l} F_1 : \forall x (A(x) \to D(x) \wedge E(x)) \\ F_2 : \neg \forall x \exists y (A(x) \wedge B(x) \to \neg A(y)) \\ F_3 : \forall x (D(x) \to (B(x) \leftrightarrow C(x))) \end{array}$$

*Obtenga la forma clausular de dicha teoría.*

**Ejercicio 18 (06/2000)** *Obtener la forma clausular de la estructura deductiva: $[P_1, P_2] \vdash C$*

$$\begin{array}{l} P_1 : \forall x \exists y \exists z (P(x,z) \vee Q(x) \to (P(y) \to \forall x R(x))) \\ P_2 : \forall x \exists y (R(x) \wedge \neg Q(y)) \to \exists x \forall y (\neg P(x,y) \vee P(y,x)) \\ C : \forall x P(x) \wedge \forall y Q(y) \end{array}$$

**Solución 5** *Véase los ejercicios resueltos de Luís Iraola.*

**Ejercicio 19 (09/2001)** *Obtener la forma clausular de la estructura deductiva: $[C_1, C_2] \vdash Q$*

$$\begin{array}{l} C_1 : \exists x \neg (A(x) \to \exists y (\neg C(y) \to \neg B(y,x))) \wedge \forall x (\neg D(x) \to \neg C(x)) \\ C_2 : \forall x (A(x) \wedge \neg E(x) \to \exists y (B(y,x) \wedge \neg D(y))) \\ Q : \forall x \neg (\exists y (B(y,x) \wedge C(y)) \wedge \neg E(x) \wedge A(x)) \end{array}$$

**Solución 6** *Véase los ejercicios resueltos de Luís Iraola.*

**Ejercicio 20 (09/2002)** *Dado el siguiente conjunto de fórmulas:*

$$\begin{array}{l} F_1 : \forall x (q(x) \to \exists y \neg r(x,y) \vee s(x)) \\ F_2 : \exists y \forall x (p(x,y) \to q(x) \wedge r(y,x)) \\ F_3 : \forall x \forall y p(x,y) \\ F_4 : \forall x \neg s(x) \end{array}$$

*construir el conjunto de cláusulas correspondientes a las fórmulas anteriores.*

**Ejercicio 21 (06/2003)** *Reescribir las cláusulas siguientes de manera que tengan al menos una conectiva de implicación y no aparezcan constantes ni términos con funciones:*

$$\begin{array}{l} C_1 : R(y) \vee \neg Q(f(x),x) \\ C_2 : \neg B(x) \vee R(y) \vee R(g(x,y)) \\ C_3 : B(x) \vee R(b) \vee Q(x) \vee H(b) \\ C_4 : R(y) \vee \neg H(b) \end{array}$$

**Ejercicio 22 (02/2003)** *Dado el siguiente conjunto de fórmulas:*

$$F_1 : \forall x(A(x) \wedge \exists y \neg B(y) \to C(x, y))$$
$$F_2 : \exists x A(x) \wedge \neg \forall y \exists z C(z, y)$$
$$F_3 : \forall y \exists x \forall z((B(x) \to A(z)) \wedge (\neg C(y, z) \to \neg B(y)))$$

*Construir el conjunto de cláusulas correspondientes a las fórmulas anteriores.*

**Solución 7** *Véase los ejercicios resueltos de Luís Iraola.*

**Ejercicio 23 (09/2003)** *Para cada una de las fórmulas siguientes, marcar con una X todas las respuestas que definan formas clausulares CORRECTAS de la fórmula inicial.*

$$\forall x(A(x) \wedge B(f(x)) \to \forall z C(z, x))$$

| | *CORRECTA* | *INCORRECTA* |
|---|---|---|
| $\neg A(x) \vee \neg B(f(x)) \vee C(z, x)$ | ☐ | ☐ |
| $\neg A(a) \vee \neg B(f(a)) \vee C(z, a)$ | ☐ | ☐ |
| $\neg A(g(z)) \vee \neg B(f(g(z))) \vee C(z, g(z))$ | ☐ | ☐ |
| $\neg A(a) \vee \neg B(f(a)) \vee C(z, b)$ | ☐ | ☐ |
| $\neg A(g(z)) \vee \neg B(f(g(z))) \vee C(z, a)$ | ☐ | ☐ |

$$\exists x A(x) \wedge \exists x B(x) \wedge \forall y C(y)$$

| | *CORRECTA* | *INCORRECTA* |
|---|---|---|
| $A(a), B(a), C(y)$ | ☐ | ☐ |
| $A(a), B(b), C(f(a))$ | ☐ | ☐ |
| $A(f(y)), B(f(y)), C(y)$ | ☐ | ☐ |
| $A(f(y)), B(a), C(y)$ | ☐ | ☐ |
| $A(a), B(b), C(y)$ | ☐ | ☐ |

$$\neg(\forall x \exists y A(x, y) \to \exists z B(z)) \wedge \neg(\exists z B(z) \to \forall y \exists x C(x, f(y)))$$

| | *CORRECTA* | *INCORRECTA* |
|---|---|---|
| $A(x, g(x)), \neg B(z), B(a), \neg C(b, f(y))$ | ☐ | ☐ |
| $A(x, g(x)), \neg B(a), B(a), \neg C(b, f(y))$ | ☐ | ☐ |
| $A(x, g(x)), \neg B(z), B(a), \neg C(x, f(b))$ | ☐ | ☐ |
| $A(x, g(x)), B(a), \neg C(x, f(b))$ | ☐ | ☐ |
| $A(g(x), x), \neg B(a), \neg C(x, f(b))$ | ☐ | ☐ |

**Ejercicio 24 (06/2004)** *Ponga en forma clausular la estructura deductiva:* $[P_1, P_2] \vdash C$

$$P_1 : \exists x A(x) \vee \exists x B(x) \to \exists x C(x)$$
$$P_2 : \forall x A(x) \to (\exists y B(y) \to (\forall z C(z) \to A(a)))$$
$$C : \forall y(\exists x A(x) \to (B(y) \wedge A(y) \to \exists z B(z)))$$

**Ejercicio 25 (06/2006)** *Para cada una de las fórmulas siguientes, marcar con una X todas las respuestas que definan formas clausulares CORRECTAS de la fórmula inicial.*

$$(\forall x \exists y \forall z(A(x) \vee \neg B(y, z)) \to \exists x \forall t B(x, t)) \wedge \neg(B(a) \vee \forall s A(s))$$

| | *CORR.* | *INCORR.* |
|---|---|---|
| $\neg A(b) \vee B(b, t), B(y, f(y)) \vee B(b, t), \neg B(a), \neg A(c)$ | ☐ | ☐ |
| $\neg A(b) \vee B(c, t), B(y, f(y)) \vee B(c, t), \neg B(a), \neg A(g(y))$ | ☐ | ☐ |
| $\neg A(b) \vee B(f(y), t), B(y, g(y)) \vee B(f(y), t), \neg B(a), \neg A(c)$ | ☐ | ☐ |
| $\neg A(f(t)) \vee B(b, t), B(y, g(y, t)) \vee B(b, t), \neg B(a), \neg A(c)$ | ☐ | ☐ |
| $\neg A(c) \vee B(b, t), B(y, f(t)) \vee B(b, t), \neg B(a), \neg A(a)$ | ☐ | ☐ |

$$\exists x A(x) \vee \exists x B(x) \vee \exists x \forall y C(x, y, f(a))$$

| | *CORR.* | *INCORR.* |
|---|---|---|
| $A(a), B(b), C(c, y, f(a))$ | ☐ | ☐ |
| $A(b), B(b), C(b, y, f(a))$ | ☐ | ☐ |
| $A(b), B(b), C(c, y, f(a))$ | ☐ | ☐ |
| $A(g(y)), B(g(y)), C(b, y, f(a))$ | ☐ | ☐ |
| $A(c), B(g(y)), C(b, y, f(a))$ | ☐ | ☐ |

$$\forall y(A(y) \to \exists z B(z,a)) \wedge \forall t A(t) \to \exists x B(a,x)$$

| | *CORR.* | *INCORR.* |
|---|---|---|
| $A(b) \vee \neg A(b) \vee B(a,c), \neg B(z,a) \vee \neg A(b) \vee B(a,c)$ | □ | □ |
| $A(y) \vee \neg A(t) \vee B(a,f(y,t)), \neg B(g(y,t),a) \vee \neg A(t) \vee B(a,f(y,t))$ | □ | □ |
| $A(b) \vee \neg A(a) \vee B(a,f(z)), \neg B(z,a) \vee \neg A(a) \vee B(a,f(z))$ | □ | □ |
| $A(b) \vee \neg A(f(z)) \vee B(a,c), \neg B(z,a) \vee \neg A(f(z)) \vee B(a,c)$ | □ | □ |
| $A(y) \vee \neg A(b) \vee B(a,c), \neg B(f(y),a) \vee \neg A(t) \vee B(a,x)$ | □ | □ |

**Ejercicio 26 (06/2007)** *Para cada una de las fórmulas siguientes, marcar con una X todas las respuestas que definan formas clausulares CORRECTAS de la fórmula inicial.*

$$\forall x(\forall y(\forall z A(z) \to \neg \forall t B(y,t)) \to \exists y B(x,y))$$

| | *CORR.* | *INCORR.* |
|---|---|---|
| $A(z) \vee B(x,f(x)), B(f(x),t) \vee B(x,f(x))$ | □ | □ |
| $A(z) \vee B(x,f(x)), B(y,a) \vee B(x,f(x))$ | □ | □ |
| $A(z) \vee B(x,f(x)), B(g(x),t) \vee B(x,f(x))$ | □ | □ |
| $A(z) \vee B(x,f(x,z,t)), B(g(x),t) \vee B(x,f(x,z,t))$ | □ | □ |

$$\forall x \exists y A(x,y) \vee \forall x \exists z B(x,z)$$

| | *CORRECTA* | *INCORRECTA* |
|---|---|---|
| $A(x,f(x)) \vee B(s,z)$ | □ | □ |
| $A(x,f(x,s)) \vee B(s,f(x,s))$ | □ | □ |
| $A(x,f(x)) \vee B(x,g(x))$ | □ | □ |
| $A(x,f(x)) \vee B(x,a)$ | □ | □ |

**Ejercicio 27 (02/2008)** *Obtener la forma clausular de las siguientes fórmulas:*

$$A_1 : \forall x(P(x) \to Q(x) \vee Q(a)) \to (\exists x P(x) \to \exists x(Q(x) \vee Q(a)))$$
$$A_2 : \neg \exists x \forall z(P(x) \to \neg Q(z)) \vee (\exists z A(y,z) \to \exists u B(y,u))$$
$$A_3 : \neg \exists x \forall y(\neg C(x) \vee (B(a) \wedge D(x,y))) \wedge \neg \exists x A(x)$$

**Ejercicio 28** *Demuestra que las equivalencias siguientes son fórmulas válidas:*

$$(\forall x F \to G) \leftrightarrow \exists x(F \to G)$$
$$(\exists x F \to G) \leftrightarrow \forall x(F \to G)$$
$$(F \to \forall x G) \leftrightarrow \forall x(F \to G)$$
$$(F \to \exists x G) \leftrightarrow \exists x(F \to G)$$

*Consejo: demuestra cada dirección suponendo que no sea verdad y sacando una contradicción.*

**Ejercicio 29** *Encuentra una demostración del Lema de existencia de la forma prenex: la forma prenex de una fórmula siempre existe.*
*Sugerencia: encontrar la forma prenex significa aplicar una serie de reglas de equivalencia, en cierto orden...*

**Ejercicio 30** *¿Hay algún caso en que la forma prenex de una fórmula no es única, de una forma no trivial? es decir, ¿puede haber dos formas prenex de una misma fórmula que difieran por algo más que los nombres de las variables ligadas?*

*Piensa en si la forma prenex de $F$ se puede definir como*

- *una fórmula que está en forma prenex y que es equivalente a $F$; o*
- *una fórmula que está en forma prenex y que se obtiene a partir de $F$ aplicando un cierto conjunto de reglas.*

**Ejercicio 31** *Encuentra una demostración del Lema de existencia de la forma normal conjuntiva: la forma normal conjuntiva de una fórmula sin cuantificadores siempre existe.*
*Sugerencia: encontrar la FNC significa aplicar una serie de reglas de equivalencia, en cierto orden...*

**Ejercicio 32** *Considerar la fórmula*

$$\neg((F_1 \wedge G_1) \vee (F_2 \wedge G_2))$$

*Aplicando las reglas para sacar la forma normal conjuntiva, se puede obtener*

$$(\neg F_1 \vee \neg G_1) \wedge (\neg F_2 \vee \neg G_2)$$

*pero también una fórmula mucho más compleja (¿cómo?), que es más restrictiva que la primera: es*

$$... \wedge (\neg F_1 \vee \neg G_1) \wedge (\neg F_2 \vee \neg G_2) \wedge ...$$

- *¿por qué es más restrictiva (mira la estructura)?*
- *¿cómo puede ser ? ¿no deberían ser las dos equivalentes a la fórmula de partida? ¿dónde está el truco?*

**Ejercicio 33** *Calcula la forma normal de Skolem de las siguientes fórmulas:*

1. $\exists x \forall y \forall z \exists u \forall v \exists w p(x, y, z, u, v, w)$
2. $\forall x \exists y \exists z((\neg p(x, y) \wedge q(x, z)) \vee r(x, y, z))$
3. $\neg(\forall x p(x) \rightarrow \exists y \forall z q(y, z))$
4. $\forall x((\neg e(x, 0) \rightarrow (\exists y(e(y, g(x)) \wedge \forall z(e(z, g(x)) \rightarrow e(y, z))))))$
5. $\neg(\forall x p(x) \rightarrow \exists y p(y))$

**Ejercicio 34 (02/2009)** *Obtener la forma clausular de las siguientes fórmulas:*

1. $p(z) \rightarrow \neg q(z) \vee (\forall x(\forall y p(y) \rightarrow r(x, y)))$
2. $p(x) \wedge \forall z\,((\exists y q(z, y) \rightarrow q(f(f(y)), f(z))) \rightarrow r(z, f(z), x))$

*y, para cada una,*

- *escribir los pasos de la transformación;*
- *especificar qué propiedad se preserva durante cada paso, y qué propiedad se preserva durante todo el proceso.*

**Solución 8** *Nota que en las dos fórmulas hay un cuantificador cuyo alcance es más pequeno de lo que parece. Por eso, algunas ocurrencias de variables están libres. Se renombra la $y$ ligada con $y'$.*

1. $p(z) \rightarrow \neg q(z) \vee (\forall x(\forall y' p(y') \rightarrow r(x, y)))$
   - *forma prenex:*
     $\forall x \exists y'(p(z) \rightarrow \neg q(z) \vee (p(y') \rightarrow r(x, y)))$
   - *cierre existencial:*
     $\exists z \exists y \forall x \exists y'(p(z) \rightarrow \neg q(z) \vee (p(y') \rightarrow r(x, y)))$
   - *FNC:*
     $\exists z \exists y \forall x \exists y'(\neg p(z) \vee \neg q(z) \vee \neg p(y') \vee r(x, y))$
   - *Skolem:*
     $\forall x(\neg p(a) \vee \neg q(a) \vee \neg p(f(x)) \vee r(x, b))$
   - *forma clausular:*
     $\{\ \neg p(a) \vee \neg q(a) \vee \neg p(f(x)) \vee r(x, b)\ \}$
2. $p(x) \wedge \forall z\,((\exists y' q(z, y') \rightarrow q(f(f(y)), f(z))) \rightarrow r(z, f(z), x))$
   - *forma prenex:*
     $\forall z \exists y'\,(p(x) \wedge ((q(z, y') \rightarrow q(f(f(y)), f(z))) \rightarrow r(z, f(z), x)))$
   - *cierre existencial:*
     $\exists x \exists y \forall z \exists y'\,(p(x) \wedge ((q(z, y') \rightarrow q(f(f(y)), f(z))) \rightarrow r(z, f(z), x)))$
   - *FNC:*
     $\exists x \exists y \forall z \exists y'\,(p(x) \wedge (q(z, y') \vee r(z, f(z), x)) \wedge (\neg q(f(f(y)), f(z)) \vee r(z, f(z), x)))$
   - *Skolem:*
     $\forall z\,(p(a) \wedge (q(z, g(z)) \vee r(z, f(z), a)) \wedge (\neg q(f(f(b)), f(z)) \vee r(z, f(z), a)))$
   - *forma clausular:*
     $\{\ p(a),\ q(z, g(z)) \vee r(z, f(z), a),\ \neg q(f(f(b)), f(z)) \vee r(z, f(z), a)\ \}$

*La satisfacibilidad se preserva en cada paso. La semántica se preserva en la forma prenex y en la FNC.*

**Ejercicio 35 (03/2009)** *Para la fórmula siguiente y cada una de las posibles formas clausulares que aparecen a continuación, marcar con una X la respuesta que corresponda, dependiendo de la forma clausular es CORRECTA (C) o no (I):*

$$\exists z(\forall x p(x,z) \wedge \exists z r(g(h(a)),z) \to q(y,z,b)) \to r(z,c)$$

| | | C | I |
|---|---|---|---|
| (1) | $r(b,c) \vee p(l(w,v),w),\ \neg q(y,w,b) \vee r(b,c),\ r(g(h(a)),v) \vee r(b,c)$ | □ | □ |
| (2) | $r(d,c) \vee p(f(z'),z'),\ \neg q(y,z',b) \vee r(d,c),\ r(g(h(a)),z'') \vee r(d,c)$ | □ | □ |
| (3) | $p(x,w) \vee r(f,c),\ \neg q(y,v,b) \vee r(f,c),\ r(g(h(a)),v) \vee r(f,c)$ | □ | □ |
| (4) | $\neg p(x,z') \vee r(d,c) \vee r(g(h(a)),z''),\ \neg p(x,z') \vee r(d,c) \vee \neg q(y,z',b)$ | □ | □ |
| (5) | $r(e,c) \vee p(f(v,w),w),\ r(e,c) \vee \neg q(y,w,b),\ r(e,c) \vee r(g(h(a)),v)$ | □ | □ |

**Solución 9**

*(1): incorrecta porque las funciones de Skolem no usan nombres nuevos*
*(2): correcta*
*(3): incorrecta porque el ámbito del segundo $\exists z$ no incluye $q(y,z,b)$*
*(4): incorrecta porque $\to$ tiene menor precedencia que $\wedge$*
*(5): correcta*

**Ejercicio 36 (03/2009)** *Obtener la forma clausular de la siguiente estructura deductiva: $[P_1, P_2] \vdash C$*

$P_1$ : $\forall w\,((q(w) \wedge (\exists y p(w,g(y)) \to \exists x p(g(x),w))) \vee \forall z r(z,w))$
$P_2$ : $\exists v\,(q(v) \to \neg\exists z p(g(z),z) \wedge \neg\forall v(\neg r(v,v)))$
$C$ : $\exists x r(g(x),g(g(b))) \wedge \forall v p(a,v)$

**Solución 10**

$P_1^1$ $\forall w\forall y\exists x\forall z\,((q(w) \wedge (p(w,g(y)) \to p(g(x),w))) \vee r(z,w))$
$P_1^2$ *lo mismo*
$P_1^3$ $\forall w\forall y\exists x\forall z\,((q(w) \vee r(z,w)) \wedge (\neg p(w,g(y)) \vee p(g(x),w) \vee r(z,w)))$
$P_1^4$ $\forall w\forall y\forall z\,((q(w) \vee r(z,w)) \wedge (\neg p(w,g(y)) \vee p(g(h(w,y)),w) \vee r(z,w)))$
$P_1^C$ $q(w) \vee r(z,w),\quad \neg p(w,g(y)) \vee p(g(h(w,y)),w) \vee r(z,w)$

$P_2^1$ $\exists v\forall z\exists v'(q(v) \to \neg p(g(z),z) \wedge r(v',v'))$
$P_2^2$ *lo mismo*
$P_2^3$ $\exists v\forall z\exists v'((\neg q(v) \vee \neg p(g(z),z)) \wedge (\neg q(v) \vee r(v',v')))$
$P_2^4$ $\forall z((\neg q(c) \vee \neg p(g(z),z)) \wedge (\neg q(c) \vee r(f(z),f(z))))$
$P_2^C$ $\{\neg q(c) \vee \neg p(g(z),z),\quad \neg q(c) \vee r(f(z),f(z))\}$

$C^1$ $\forall x\exists v(\neg r(g(x),g(g(b))) \vee \neg p(a,v))$
$C^2$ *lo mismo*
$C^3$ *lo mismo*
$C^4$ $\forall x(\neg r(g(x),g(g(b))) \vee \neg p(a,l(x)))$
$C^C$ $\{\neg r(g(x),g(g(b))) \vee \neg p(a,l(x))\}$

**Ejercicio 37 (03/2009)** *Para cada una de las fórmulas siguientes y las posibles formas clausulares que aparecen a continuación, decir si es correcta o incorrecta:*

– $\forall x((B(x) \to \exists y\neg D(y,x) \vee C(x)) \to \forall z C(z)) \to \forall x A(x,y)$

$$\neg B(a) \vee \neg D(b,a) \vee C(a) \vee A(x,d), \neg C(c) \vee A(x,d)$$
$$B(a) \vee \neg C(z) \vee A(x,b), D(y,a) \vee \neg C(z) \vee A(x,b), \neg C(a) \vee \neg C(z) \vee A(x,b)$$
$$\neg B(f(x)) \vee \neg D(g(x),f(x)) \vee C(f(x)) \vee A(x,a), \neg C(h(x)) \vee A(x,a)$$
$$\neg B(a) \vee \neg D(y,a) \vee C(a) \vee A(a,b), \neg C(f(y)) \vee A(a,b)$$
$$\neg B(a) \vee \neg D(b,a) \vee C(a) \vee A(x,c), \neg C(f(x)) \vee A(x,c)$$

– $\forall x(A(x) \wedge \exists y B(f(x),y)) \to \exists z C(z,x)$

$$\neg A(a) \vee \neg B(f(a),y) \vee C(z,a)$$
$$\neg A(a) \vee \neg B(f(a),y) \vee C(c,b)$$
$$\neg A(x) \vee \neg B(f(x),y) \vee C(f(y),x)$$
$$\neg A(a) \vee \neg B(f(a),y) \vee C(g(y),b)$$
$$\neg A(a) \vee \neg B(f(a),y) \vee C(g(y),a)$$

**Ejercicio 38 (03/2009)** *Obtener la forma clausular de la siguiente estructura deductiva* $[P_1, P_2] \vdash C$*:*

$$\begin{array}{r}P_1 : \exists x(A(x) \vee \forall y B(x,y)) \to \neg\forall z(A(z) \to C(x,z)) \\ P_2 : \forall x \exists y(A(x) \wedge \neg A(y)) \to \exists x \forall y(\neg B(x,y) \vee C(y,x)) \\ C : \forall x(A(x) \to \exists x \exists y \neg C(x,y))\end{array}$$

**Ejercicio 39 (03/2009)** *Para la fórmula siguiente y las posibles formas clausulares que aparecen a continuación, decir si la forma clausular es correcta de cara a la fórmula:*

$$\forall x((\neg A(x,a) \to (\exists y(B(y,g(x),z) \wedge \forall z(B(z,g(x)) \to A(y,z))))))$$

$$\begin{array}{l}A(x,a) \vee B(f(x,z),g(x),z), A(x,a) \vee \neg B(z,g(x)) \vee A(f(x,z),z) \\ A(x,a) \vee B(f(x),g(x),z), \neg B(z,g(x)) \vee A(f(x),z) \\ A(x,a) \vee B(f(x),g(x),b), A(x,a) \vee \neg B(z,g(x)) \vee A(f(x),z) \\ A(x,a) \vee B(f(z),g(x),z), A(x,a) \vee \neg B(z,g(x)) \vee A(f(z),z) \\ A(b,a) \vee B(c,g(x),z), A(b,a) \vee \neg B(z,g(x)) \vee A(c,z)\end{array}$$

**Ejercicio 40 (03/2009)** *Obtener la forma clausular de la siguiente estructura deductiva* $[P_1, P_2] \vdash C$*:*

$$\begin{array}{r}P_1 : \neg\exists x \neg\exists y \neg(A(x) \to B(x,y)) \vee \exists x \forall z(B(x,z) \to C(y,z)) \\ P_2 : \neg\exists x \forall y(\neg A(x) \vee (D(a) \wedge B(x,y))) \wedge \neg\exists x D(x) \\ C : \forall x(B(x) \to \exists y \neg C(y,x) \vee D(x))\end{array}$$

**Ejercicio 41 (09/2008)** *Obtener la forma clausular de la siguiente estructura deductiva* $[A_1, A_2] \vdash B$*:*

$$\begin{array}{r}A_1 : \forall x \exists y(A(x,y) \vee B(x,y)) \to \exists x \forall z C(x,z) \\ A_2 : \forall x D(x) \to \forall x \forall y A(x,y) \\ B : \exists x(\exists y(D(x) \wedge B(x,y)) \to \forall z C(x,z))\end{array}$$

**Ejercicio 42 (07/2009)** *Obtener la forma clausular de cada una de las fórmulas siguientes (consideradas de forma independiente):*

$$\begin{array}{l}(a)\ \forall x(\neg p(x,a) \to \exists y(p(y,g(x)) \wedge \forall z(p(z,g(x)) \to P(y,z)))) \\ (b)\ \forall x p(x) \wedge [(\forall y(q(y) \to \neg r(a,y)) \to \forall y p(y)) \vee \forall x p(x)]\end{array}$$

**Solución 11**

$$(a)\ \forall x(\neg p(x,a) \to \exists y(p(y,g(x)) \wedge \forall z(p(z,g(x)) \to P(y,z))))$$

$$\begin{array}{l}\forall x(p(x,a) \vee \exists y \forall z(p(y,g(x)) \wedge (\neg p(z,g(x)) \vee p(y,z)))) \\ \forall x \exists y \forall z[(p(x,a) \vee p(y,g(x))) \wedge (p(x,a) \vee \neg p(z,g(x)) \vee P(y,z))] \\ \textit{Forma clausular}: \{p(x,a) \vee p(f(x),g(x)), p(x,a) \vee \neg p(z,g(x)) \vee p(f(x),z)\}\end{array}$$

$$(b)\ \forall x p(x) \wedge [(\forall y(q(y) \to \neg r(a,y)) \to \forall y p(y)) \vee \forall x p(x)]$$

$$\begin{array}{l}\forall x p(x) \wedge [(\exists y(q(y) \wedge r(a,y)) \vee \forall y p(y)) \vee \forall x P(x)] \\ \forall x p(x) \wedge \exists y \forall z \forall t[((q(y) \vee p(z)) \wedge (r(a,y) \vee P(z))) \vee p(t)] \\ \forall x p(x) \wedge \exists y \forall z \forall t[(q(y) \vee p(z) \vee p(t)) \wedge (r(a,y) \vee p(z) \vee p(t))] \\ \forall x \exists y \forall z \forall t[p(x) \wedge (q(y) \vee p(z) \vee p(t)) \wedge (r(a,y) \vee p(z) \vee P(t))] \\ \textit{Forma clausular}: \{p(x), q(f(x)) \vee p(z) \vee p(t), r(a,f(x)) \vee P(z) \vee P(t)\}\end{array}$$

## 5 Estardarización de interpretaciones

**Ejercicio 43 (09/1993)** *Dado el conjunto de fórmulas* $\{F_1, F_2, F_3, F_4\}$

$$\begin{array}{l} F_1 : \forall z \exists x((\neg P(z) \vee \exists y Q(x,y,z)) \wedge (\neg R(z) \vee \neg P(x))) \\ F_2 : \exists z S(z) \rightarrow \forall z T(z) \\ F_3 : \forall z \forall x (T(z) \rightarrow P(x)) \\ F_4 : \exists z \forall y (\neg \exists x Q(z,x,y) \wedge S(y) \wedge R(z)) \end{array}$$

*Partiendo de la forma clausular y considerando el universo y base de Herbrand correspondientes, construir el árbol semántico asociado. ¿Qué se deduce con respecto a la satisfacibilidad de las fórmulas de partida de dicho árbol?*

**Solución 12** *Véase los ejercicios resueltos de Luís Iraola.*

**Ejercicio 44 (02/1994)** *Partiendo de la forma clausular de la fórmula:*

$$\forall x(\exists y P(x,y) \vee \neg \forall y(Q(y) \rightarrow \exists x R(y,x)))$$

*y en base a la definición del universo de Herbrand, construir* $H_0$*,* $H_1$ *y* $H_2$*.*

**Ejercicio 45** *Estudiar si el conjunto de cláusulas asociado a las siguientes estructuras deductivas, es insatisfacible o no. Caso de no serlo, encontrar un contramodelo de la estructura deductiva a partir del árbol semántico asociado al conjunto de cláusulas.*

1. $p \wedge \neg r \rightarrow q, r \rightarrow s, q \vee s \rightarrow t \vdash \neg p$
2. $p \rightarrow \neg q, q \vee s, (p \rightarrow \neg r) \rightarrow s \vdash s$

*(siendo p, q, r, s, t fórmulas cerradas o proposicionales).*

**Solución 13** *Véase los ejercicios resueltos de Luís Iraola.*

**Ejercicio 46 (06/1997)** *Si se define la interpretación Herbrand I mediante las asignaciones de valor de verdad:*

$$\begin{array}{ll} I(P(a,a)) = \mathbf{v}, & I(P(a,b)) = \mathbf{v} \\ I(P(b,b)) = \mathbf{v}, & I(P(b,a)) = \mathbf{f} \\ I(Q(a)) = \mathbf{f}, & I(Q(b)) = \mathbf{v} \end{array}$$

*estudiar y justificar si I es o no modelo de la cláusula* $\neg P(X,b) \vee Q(a)$ *y de la cláusula* $P(Y,b) \vee Q(Y)$*.*

**Ejercicio 47 (06/1997)**

1. *Estudiar a partir del árbol semántico, si es satisfacible o no el siguiente conjunto de cláusulas:*

$$\{\neg Q(x_1), \neg P(x_2,b) \vee Q(a), P(x_3,a)\}$$

2. *escribir las fórmulas de una estructura deductiva cuyo conjunto de cláusulas asociado coincida con el del apartado anterior. De acuerdo con el resultado anterior, ¿será correcta o no?*

**Ejercicio 48 (02/1998)** *Dadas*

$$\begin{array}{l} C_1 : P(a,x,a,a) \\ C_2 : \neg N(x,y) \vee \neg P(r,y,s,z) \vee P(f(x,r),y,f(x,s),z) \\ C_3 : \neg M(x,y) \vee \neg P(r,y,z,s) \vee P(f(x,r),y,z,f(x,s)) \end{array}$$

1. *calcular el universo de Herbrand correspondiente a* $\{C_1, C_2, C_3\}$*;*
2. *indicar seis elementos de la base de Herbrand de* $\{C_1, C_2, C_3\}$*.*

**Ejercicio 49 (09/1998)** *Sea* $\{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}$ *el conjunto de fórmulas siguiente:*

$$\begin{array}{l} A_1 : \forall x \exists y (A(x,y) \rightarrow B(x) \wedge C(y)) \\ A_2 : \neg \forall y C(y) \\ A_3 : \forall x (B(x) \rightarrow \exists x \exists y \neg D(x,y)) \\ A_4 : \forall x \neg E(x) \\ A_5 : \forall x \forall y D(x,y) \vee \exists x E(x) \end{array}$$

*Partiendo del conjunto de cláusulas, comprobar y justificar con un contramodelo, mediante un árbol semántico, que no se puede deducir* $\forall x \neg D(x,x)$ *del enunciado* $\{A_4, A_5\}$*.*

**Ejercicio 50 (09/1998)** *Sea* $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ *el conjunto de fórmulas siguiente:*

$$\begin{array}{l} A_1 : \exists x B(x) \\ A_2 : \forall x \forall y (C(x,y) \rightarrow D(x) \wedge B(x) \\ A_3 : \exists x \forall y C(x,y) \\ A_4 : \neg \exists x \exists y (D(x) \wedge \neg A(y)) \end{array}$$

1. *encontrar, mediante un árbol semántico, un conjunto finito de instancias básicas de cláusulas, que permita afirmar que del enunciado* $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ *se deduce la fórmula* $\exists x B(x) \wedge \forall x A(x)$.
2. *¿qué se puede decir sobre la satisfacibilidad del conjunto de instancias anterior?*
3. *comprobar mediante un árbol semántico y justificar con un contramodelo, que no se puede deducir* $\exists x \neg B(x)$ *del enunciado formado por* $\{A_1, A_3\}$.

**Ejercicio 51 (06/1998)** *Sea* $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ *el conjunto de fórmulas siguiente:*

$$\begin{array}{l} A_1 : R(b) \wedge G(b) \wedge R(a) \\ A_2 : \forall x (M(x) \rightarrow (G(x) \rightarrow P(x)) \wedge (\neg G(x) \rightarrow \neg P(x))) \\ A_3 : \forall x (R(x) \rightarrow M(x)) \\ A_4 : \neg \exists x (R(x) \wedge \neg D(x)) \end{array}$$

*Comprobar y justificar mediante un árbol semántico que no se puede deducir* $G(a)$ *del enunciado resultante de eliminar toda referencia al símbolo de constante* $b$ *(o cláusulas que contienen a* $b$ *del conjunto de cláusulas correspondiente).*

**Ejercicio 52 (02/1999)** *Sea* $\{A_1, A_2, A_3\}$ *el conjunto de fórmulas correspondiente a un enunciado:*

$$\begin{array}{l} A_1 : \exists y \forall x (A(x,y) \rightarrow B(x) \wedge D(x,y)) \\ A_2 : \forall x (B(x) \rightarrow \exists y \neg D(y,x) \vee E(x)) \\ A_3 : \forall x \neg E(x) \end{array}$$

*Comprobar mediante un árbol semántico y justificar con un modelo del conjunto de cláusulas correspondiente, que no se puede deducir* $\forall x \exists y (\neg D(x,y) \vee B(y) \vee A(x,y))$ *del enunciado con la fórmula* $\{A_1\}$.

**Ejercicio 53 (09/1999)** *Dadas las cláusulas:*

$$\begin{array}{l} C_1 : r(x) \vee p(x) \vee \neg q(h(x)) \\ C_2 : \neg r(x) \\ C_3 : p(y) \vee \neg s(y, h(y)) \vee r(y) \\ C_4 : \neg s(z,x) \\ C_5 : q(y) \vee r(y) \\ C_6 : s(f(x), x) \vee \neg p(f(x)) \end{array}$$

*demostrar que son insatisfacibles utilizando su árbol semántico (y justificar, según el Teorema de Herbrand, por qué lo son).*

**Ejercicio 54 (09/2000)** *Dado un lenguaje en el que* $x$ *e* $y$ *son símbolos de variables y* $A$, $B$, $C$, $D$, $E$ *de predicados unarios, se plantea la teoría cuyos axiomas no lógicos son las tres fórmulas siguientes:*

$$\begin{array}{l} F_1 : \forall x (A(x) \rightarrow D(x) \wedge E(x)) \\ F_2 : \neg \forall x \exists y (A(x) \wedge B(x) \rightarrow \neg A(y)) \\ F_3 : \forall x (D(x) \rightarrow (B(x) \leftrightarrow C(x))) \end{array}$$

*Compruebe mediante un árbol semántico que la fórmula* $\exists x \neg (C(x) \wedge E(x))$ *no es teorema de dicha teoría y justifique por qué se puede afirmar que no lo es.*

**Ejercicio 55 (09/2001)** *Dado el siguiente conjunto de cláusulas:*

$$\{p(f(a)) \vee q(x), p(x) \vee q(g(x)), \neg q(a)\}$$

*identificar:*

1. *el universo de Herbrand y la base de Herbrand;*
2. *una interpretación de Herbrand;*

3. *una interpretación de Herbrand que asigne a las cláusulas el mismo valor de verdad que la siguiente interpretación $I$ en el dominio de los números naturales:*
   - $I(a) = 0$
   - $f_I(x) = 2x + 1, \qquad g_I(x) = 2x$
   - $p_I(x) \Leftrightarrow x$ *es impar*
   - $q_I(x) \Leftrightarrow x$ *es par (el 0 NO es par)*
4. *todas las instancias básicas de cláusulas del conjunto inicial que se puedan obtener mediante combinaciones de los literales del siguiente conjunto:*

$$\{p(f(a)), q(a), q(h(a))\}$$

**Ejercicio 56 (09/2002)** *Dado el siguiente conjunto de fórmulas:*

$$\begin{array}{l} F_1 : \forall x(q(x) \rightarrow \exists y \neg r(x, y) \vee s(x)) \\ F_2 : \exists y \forall x(p(x, y) \rightarrow q(x) \wedge r(y, x)) \\ F_3 : \forall x \forall y p(x, y) \\ F_4 : \forall x \neg s(x) \end{array}$$

*demostrar mediante un árbol semántico y justificar con el Teorema de Herbrand que dicho conjunto de cláusulas es insatisfacible.*

**Solución 14** *Véase los ejercicios resueltos de Luís Iraola.*

**Ejercicio 57 (09/2003)** *Dado el conjunto de cláusulas siguiente:*

$$\{M(x) \vee \neg G(x), \neg M(x) \vee R(x), \neg R(x) \vee \neg M(x)\}$$

1. *construir un árbol semántico e indicar cuáles de sus interpretaciones son modelos, si las hay;*
2. *indicar qué se puede decir sobre la insatisfacibilidad del conjunto de cláusulas anterior;*
3. *construir el árbol semántico asociado al conjunto de cláusulas anterior añadiéndole la cláusula $G(b)$, y comprobar si el nuevo conjunto de cláusulas es insatisfacible o no.*

**Ejercicio 58 (02/2003)** *Dado el conjunto de cláusulas siguiente:*

$$\begin{array}{l} F_1 : \forall x(A(x) \wedge \exists y \neg B(y) \rightarrow C(x, y)) \\ F_2 : \exists x A(x) \wedge \neg \forall y \exists z C(z, y) \\ F_3 : \forall y \exists x \forall z((B(x) \rightarrow A(z)) \wedge (\neg C(y, z) \rightarrow \neg B(y))) \end{array}$$

*estudiar si el conjunto de cláusulas anterior es o no satisfacible; justificar la respuesta.*

**Ejercicio 59 (06/2003)** *Dado el siguiente conjunto de cláusulas:*

$$\begin{array}{l} C_1 : P(f(x)) \vee \neg R(a, y) \vee S(x) \\ C_2 : Q(x, b) \vee \neg P(x) \\ C_3 : \neg Q(x, y) \vee S(y) \\ C_4 : R(x, y) \end{array}$$

1. *encontrar, mediante el árbol semántico, un conjunto finito de instancias básicas con el que pueda afirmarse que $\exists x S(x)$ es deducible de $\{C_1, C_2, C_3, C_4\}$.*
2. *comprobar y justificar con un contramodelo que $S(a)$ no se puede deducir de esas mismas cláusulas.*

**Solución 15** *Véase los ejercicios resueltos de Luís Iraola.*

**Ejercicio 60 (09/2004)** *Dado el conjunto de cláusulas siguiente:*

$$\begin{array}{l} C_1 : P(x) \vee P(y) \\ C_2 : \neg Q(a, y) \\ C_3 : \neg R(x) \vee \neg P(y) \\ C_4 : R(y) \vee Q(b, y) \end{array}$$

1. *construya el universo y la base de Herbrand;*
2. *encuentre, mediante un árbol semántico, un modelo del conjunto; ¿qué puede decirse de la satisfacibilidad de ese conjunto?*

*3. demuestre, mediante un árbol semántico, que la fórmula $\exists x \forall y \neg Q(x,y)$ es deducible del conjunto de cláusulas anterior.*

**Ejercicio 61 (06/2004)** *Dado el conjunto de cláusulas siguiente:*

$$\begin{array}{l} A_1 : \neg P(x) \lor T(x) \\ A_2 : P(m) \\ A_3 : Q(a,b) \lor \neg P(a) \\ A_4 : \neg Q(x,b) \\ A_5 : \neg T(c) \end{array}$$

1. *construya la base de Herbrand y dos interpretaciones Herbrand cualesquiera;*
2. *indique dos instancias de cláusulas que sean satisfechas una por cada una de las interpretaciones anteriores;*
3. *¿es insatisfacible el conjunto de cláusulas $\{A_2, A_3, A_4\}$? justifique la respuesta.*

**Ejercicio 62 (06/2005)** *Dado el conjunto de cláusulas siguiente:*

$$\begin{array}{l} C_1 : \neg C(x) \lor \neg B(x,y) \lor D(x) \\ C_2 : \neg A(x) \lor \neg B(x,y) \lor \neg D(y) \\ C_3 : \neg A(x) \lor C(x) \\ C_4 : A(f(x)) \\ C_5 : B(x, f(x)) \end{array}$$

1. *demostrar mediante un árbol semántico que del conjunto de cláusulas $\{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5\}$, es posible deducir $\forall x \neg A(x)$.*
2. *¿hay un conjunto de instancias básicas de las cláusulas anteriores que justifique el mismo resultado obtenido en el apartado anterior? ¿cuál?.*
3. *explicar el resultado del apartado anterior enunciando el teorema correspondiente.*
4. *el resultado del apartado anterior ¿es realmente significativo? (es decir, ¿es realmente un teorema lo que estamos demostrando?) Contestar partiendo de un análisis de las premisas.*

**Ejercicio 63 (06/2006)** *Dado el conjunto de cláusulas siguiente:*

$$\{p(f(a)) \lor \neg q(x), \neg p(a)\}$$

1. *definir una interpretación Herbrand que asigne a las cláusulas el mismo valor de verdad que la siguiente interpretación $I$ sobre el dominio de los números naturales (sin el 0):*
   - $I(a) = 1$
   - $f_I(x) = x + 1$
   - $p_I(x) \Leftrightarrow x$ *es menor que 3*
   - $q_I(x) \Leftrightarrow x$ *es mayor o igual que 5*
2. *la interpretación anterior ¿es modelo o es contramodelo del conjunto de fórmulas? justificar brevemente la respuesta.*

**Ejercicio 64 (09/2006)** *Dado el siguiente conjunto de cláusulas:*

$$\begin{array}{l} C_1 : A(y,x) \lor \neg B(x,y) \\ C_2 : B(a,x) \\ C_3 : \neg C(y) \lor \neg A(a,y) \end{array}$$

1. *demostrar mediante un árbol semántico que es correcta la deducción de la fórmula $\exists x \forall y (C(y) \to \neg B(y,x))$ a partir de $\{C_1, C_2, C_3\}$;*
2. *demostrar con el árbol semántico que el conjunto $\{C_1, C_2, C_3\}$ es satisfacible.*

**Ejercicio 65 (06/2006)** *Dado el siguiente conjunto de cláusulas:*

$$\begin{array}{l} C_1 : R(a,x) \\ C_2 : Q(g(y),y) \lor \neg R(y, f(y)) \\ C_3 : \neg Q(g(z),u) \lor P(f(u)) \end{array}$$

1. *demostrar mediante un árbol semántico que la fórmula $\exists x P(x)$ se deduce de $\{C_1, C_2, C_3\}$.*
2. *definir una interpretación de Herbrand que demuestre que la fórmula $P(a)$ no se deduce de $\{C_1, C_2, C_3\}$.*

**Ejercicio 66 (06/2007)** *1. Dar un árbol semántico que demuestre que el siguiente conjunto de proposiciones es satisfacible; justificar por qué;*

$$\{\neg p \vee \neg q, q \vee r, \neg r \vee \neg q, p \vee r\}$$

2. *dar una interpretación que sea modelo del conjunto anterior; explicar cómo se puede obtener dicha interpretación a partir del árbol semántico anterior;*
3. *definir una relación entre el anterior conjunto de proposiciones y el siguiente conjunto de instancias básicas que permita aplicarle a éste el mismo árbol semántico anterior; ¿qué se deduce entonces respecto del siguiente conjunto de instancias básicas?*

$$\{\neg A(f(a), b) \vee \neg C(a, f(b)), \neg A(f(a), b) \vee \neg B(g(f(a)), g(a)),$$
$$A(f(a), b) \vee C(a, f(b)), C(a, f(b)) \vee B(g(f(a)), g(a))\}$$

**Solución 16** *Véase los ejercicios resueltos de Luís Iraola.*

**Ejercicio 67 (02/2008)** *Dado el siguiente conjunto de cláusulas $C$:*

$$C = \{Q(x, y), \neg P(x, y), R(a, y) \vee P(x, y), \neg R(f(x), x) \vee \neg Q(f(x), x)\}$$

1. *definir una interpretación de Herbrand que sea modelo de $C$;*
2. *definir una interpretación de Herbrand que sea contramodelo de $C$.*

**Ejercicio 68** *Dado el conjunto de cláusulas $S$:*

$$\{\neg P(x) \vee Q(x, y), \neg Q(a, f(z)) \vee P(f(z)), P(a), \neg P(f(u))\}$$

1. *escribir su árbol semántico asociado;*
2. *¿es cerrado?, ¿por qué?*
3. *escribir un conjunto de cláusulas, instancias básicas de cláusulas de $S$, que sea finito e insatisfacible.*

**Solución 17** *Véase los ejercicios resueltos de Luís Iraola.*

**Ejercicio 69** *El universo de Herbrand de una fórmula ¿es finito? ¿es numerable? ¿es más que numerable? justifica la respuesta.*

**Ejercicio 70** *Cuál la condición necesaria y suficiente para que $H(F)$ sea finito?*

**Ejercicio 71** *La base de Herbrand de una fórmula ¿es finito? ¿es numerable? ¿es más que numerable? justifica la respuesta.*
*¿Cuál es la cardinalidad (es decir, el número de elementos) de la base de Herbrand respecto del universo de Herbrand?*

**Ejercicio 72** *Considerar la definición de interpretación Herbrand, donde se dice que $I$ aplicada a una constante es la costante misma. ¿Qué significa?*

**Ejercicio 73** *Dada la siguiente fórmula $F$, ponerla en forma clausular.*

$$\forall x(r(x) \rightarrow (\exists y \exists z(p(y) \wedge p(z) \wedge q(y, z, x))))$$

*Sean $f$ y $g$ los nombres de las nuevas funciones de Skolem. Para cada una de las interpretaciones siguientes de $F$, encontrar una interpretación Herbrand correspondiente.*

$I_1 : D_1 = \mathbf{N}$
$f(x) =$ *el predecesor de $x$*
$g(x) =$ *la división por 2 de $x$*
$p(x)$ *significa que $x$ es primo*
$q(x, y, z)$ *significa que $z$ es la suma de $x$ e $y$*
$r(x)$ *significa que $x$ es par y no es cero*
$I_2 : D_2 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
$f(x) =$ *el sucesor de $x$*
$g(0) = 1$
$g(x) = x$*multiplicado por 5, módulo 6 (si $x \neq 0$)*
$p(x)$ *significa que $x = 0$*
$q(x, y, z)$ *significa que $z$ es $x$ multiplicado por $y$, módulo 6*
$r(x)$ *significa que $x \neq 0$*

*Considerar el dominio y la interpretación de los predicados en $I_1$. ¿Se reconoce el significado de $F$ en $I_1$ (no dependiendo del significado de $f$ y $g$)? $I_1$ ¿satisface a $F$? ¿Cuál es el significado de $f$ y $g$ entonces, considerando que no estaban en $F$?*

**Ejercicio 74** *Demostrar el lema siguiente: si una interpretación $\mathcal{I} = (D, I)$ satisface a $F$, entonces todas las interpretaciones Herbrand de $F$ que corresponden a $\mathcal{I}$ también satisfacen a $F$.*
*Sugerencia: intentar primero con el caso en que $F$ tiene constantes, luego con el otro caso (sin constantes).*

**Ejercicio 75** *Encuentra un ejemplo de una fórmula $F$ y una interpretación $I$ donde $I$ no satisface $F$ a pesar de que alguna $I_H$ correspondiente lo haga.*
*Nota: se puede hacer incluso cuando $F$ tiene constantes.*

**Ejercicio 76** *Encuentra una regla para calcular cuántas interpretaciones de Herbrand corresponden a cierta $(D, I)$, si no aparecen constantes en las fórmulas.*

**Ejercicio 77** *Considera la cláusula $C = p(x) \vee q(x, f(x))$ y la interpretación*

$$\begin{aligned} I_H = \{ & \neg p(a), \neg p(f(a)), \neg p(f(f(a))), \ldots \\ & \neg q(a,a), q(a, f(a)), \neg q(a, f(f(a))), \ldots \\ & \neg q(f(a), a), q(f(a), f(a)), \neg q(f(a), f(f(a))), \ldots \\ & \ldots \} \end{aligned}$$

1. *¿satisface $I_H$ a $C$?*
2. *encuentra una interpretación $I$ sobre $\mathbf{N}$ (números naturales) tal que $I_H$ puede corresponder a $I$, e $I$ satisface $C$ sii $I_H$ también lo hace.*

*Nota: como la descripción de $I_h$ es incompleta, podría haber varias $I$; toma una interpretación razonable cualquiera.*
*Nota: para resolver este ejercicio hay que dar un "significado" a los puntitos; hazlo libremente, pero con sentido común.*

**Ejercicio 78** *Dadas las cláusulas $\mathcal{C} = \{p(x),\ q(f(f(y)))\}$ y la interpretación*

$$\begin{aligned} I_H = \{ & p(a), p(f(a)), p(f(f(a))), \ldots \\ & q(a), \neg q(f(a)), q(f(f(a))), q(f(f(f(a)))) \ldots \} \end{aligned}$$

*(1) $I_H$ ¿satisface a $C$? (2) Encontrar una interpretacion $I$ sobre $\mathbf{N}$ (números naturales) tal que $I_H$ puede corresponder a $I$, e $I$ satisface a $C$ sii $I_H$ también lo satisface.*
*Nota: dado que la representación de $I_H$ es incompleta, puede haber más de una $I$: encontrar una que sea razonable. Para hacer este ejercicio, hay que darles un significado a los puntos de suspensión. Se puede hacer con libertad, pero de una manera consistente.*

**Ejercicio 79** *Encontrar un conjunto insatisfacible $S$ de instancias básicas de cláusulas de $\mathcal{C}_i$, donde*

1. $\mathcal{C}_1 = \{p(x, a, g(x, b)),\ \neg p(f(y), z, g(f(a), b))\}$
2. $\mathcal{C}_2 = \{p(x),\ q(x, f(x)) \vee \neg p(x),\ \neg q(g(y), z)\}$

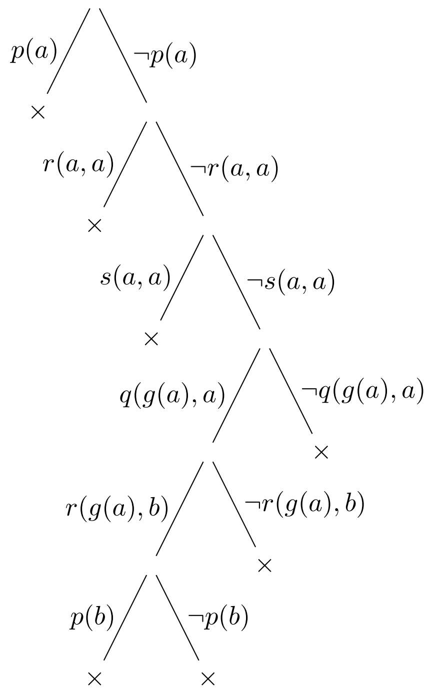
**Ejercicio 80 (02/2009)** *Dado el siguiente conjunto de cláusulas:*

$C_1$: $\neg q(x, y) \vee r(x, b)$
$C_2$: $\neg r(x, z) \vee p(z)$
$C_3$: $q(g(x), a) \vee s(a, y) \vee p(x)$
$C_4$: $\neg s(z, y)$

1. *demostrar con un árbol semántico (tras calcular el universo y la base de Herbrand) que $\exists z p(z)$ se puede deducir a partir de $\{C_1, C_2, C_3, C_4\}$;*
2. *calcular un árbol semántico cerrado y completo $t$ implica encontrar un conjunto $C_t$ insatisfacible de cáusulas básicas:*
   - *¿la prueba de qué teorema usa este resultado? Enunciar el teorema;*
   - *encontrar un $C_t$ usando el árbol semántico que se acaba de construir;*
   - *Aplicar, si es posible, las primeras tres reglas (en orden) del método de Davis-Putnam, y el resultado sobre $C_t$ (nota: (1) aplicar la primera regla hasta que no se pueda aplicarla (2) después aplicar la segunda regla hasta que no se pueda aplicarla (1) después aplicar la tercera regla hasta que no se pueda aplicarla).*

**Solución 18**

1. *Universo de Herbrand:* $U = \{g^n(a) | n \geq 0\} \cup \{g^n(b) | n \geq 0\}$, *donde* $g^0(x) \equiv x$ *y* $g^{n+1}(x) \equiv g(g^n(x))$. *base de Herbrand:*
$$B = \{p(t) | t \in U\} \cup \{q(t, t') | t, t' \in U\} \cup \{r(t, t') | t, t' \in U\} \cup \{s(t, t') | t, t' \in U\}$$
*Un posible árbol:*




2. *Estamos hablando del teorema de Herbrand; el conjunto de instancias básicas es:*
$$C_t = \{\ \neg p(a),\ \neg r(a, a) \vee p(a),\ \neg s(a, a),\ q(g(a), a) \vee s(a, a) \vee p(a),\ \neg q(g(a), a) \vee r(g(a), b),\ \neg p(b),\ \neg r(g(a), b) \vee p(b)\ \}$$
*Aplicamos Davis-Putnam:*
   – *la regla de las tautologías no se puede aplicar*
   – *literales aislados se puede aplicar hasta obtener la cláusula vacía:*

$$\{\neg p(a), \neg r(a, a) \vee p(a), \neg s(a, a), q(g(a), a) \vee s(a, a) \vee p(a), \neg q(g(a), a) \vee r(g(a), b), \neg p(b), \neg r(g(a), b) \vee p(b)\}$$
$$[\neg p(a)]$$
$$\{\neg r(a, a), \neg s(a, a), q(g(a), a) \vee s(a, a), \neg q(g(a), a) \vee r(g(a), b), \neg p(b), \neg r(g(a), b) \vee p(b)\}$$
$$[\neg r(a, a)]$$
$$\{\neg s(a, a), q(g(a), a) \vee s(a, a), \neg q(g(a), a) \vee r(g(a), b), \neg p(b), \neg r(g(a), b) \vee p(b)\}$$
$$[\neg s(a, a)]$$
$$\{q(g(a), a), \neg q(g(a), a) \vee r(g(a), b), \neg p(b), \neg r(g(a), b) \vee p(b)\}$$
$$[q(g(a), a)]$$
$$\{r(g(a), b), \neg p(b), \neg r(g(a), b) \vee p(b)\}$$
$$(r(g(a), b))$$
$$\{\neg p(b), p(b)\}$$
$$[\neg p(b)]$$
$$\square$$

   – *no hace falta aplicar literales puros*

**Ejercicio 81 (04/2009)** *Considera el siguiente conjunto de cláusulas:*
$$\{p(a) \vee q(b), \neg p(a) \vee \neg q(b) \vee r(c), \neg r(c)\}$$
*Utilizando la regla de resolución, demuestra la insatisfacibilidad del conjunto. En caso de no ser ello posible, define una interpretación de Herbrand que demuestre la satisfacibilidad del conjunto.*

**Ejercicio 82 (04/2009)** *Dado el siguiente conjunto $\mathcal{C}$ de cláusulas:*

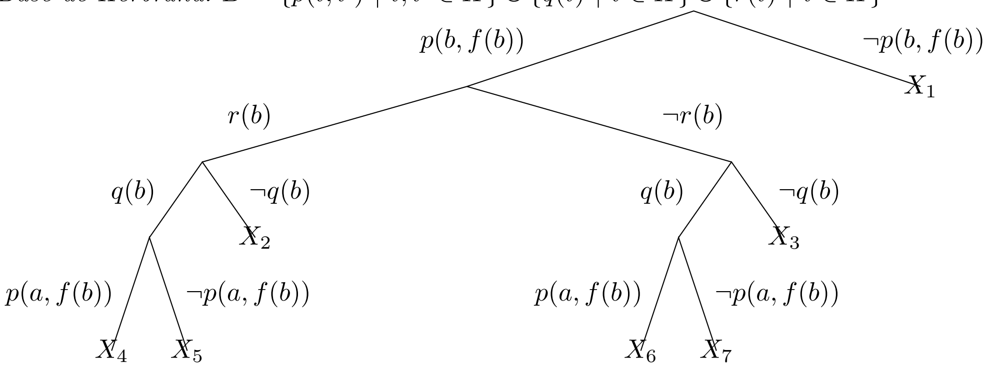
$$\begin{array}{ll} C_1 & \neg p(x, f(x)) \vee q(x) \vee r(b) \\ C_2 & \neg p(a, f(y)) \vee \neg q(y) \\ C_3 & p(x, f(b)) \\ C_4 & \neg r(b) \vee q(b) \end{array}$$

1. *demostrar mediante un árbol semántico que $\mathcal{C}$ es insatisfacible;*
2. *identificar un conjunto finito e insatisfacible de cláusulas básicas de $\mathcal{C}$.*

**Solución 19**

*Universo de Herbrand:* $H = \{f^n(a) \mid n \geq 0\} \cup \{f^n(b) \mid n \geq 0\}$

*Base de Herbrand:* $B = \{p(t, t') \mid t, t' \in H\} \cup \{q(t) \mid t \in H\} \cup \{r(t) \mid t \in H\}$




- $X_1$ *falsifica la instancia* $p(b, f(b))$ *de* $C_3$
- $X_2$ *falsifica* $C_4$
- $X_3$ *falsifica la instancia* $\neg p(b, f(b)) \vee q(b) \vee r(b)$ *de* $C_1$
- $X_4$ *y* $X_6$ *falsifican la instancia* $\neg p(a, f(b)) \vee \neg q(b)$ *de* $C_2$
- $X_5$ *y* $X_7$ *falsifican la instancia* $p(a, f(b))$ *de* $C_3$

*Un conjunto insatisfacible de cláusulas es* $\{p(b, f(b)), \neg r(b) \vee q(b), \neg p(b, f(b)) \vee q(b) \vee r(b), \neg p(a, f(b)) \vee \neg q(b), p(a, f(b))\}$

**Ejercicio 83 (02/2008)** *Dado el siguiente conjunto de cláusulas:*

$$C = \{Q(x, y), \neg P(x, y), R(a, y) \vee P(x, y), \neg R(f(x), x) \vee \neg Q(f(x), x)\}$$

1. *definir una interpretación Herbrand que sea un módelo de $C$;*
2. *definir una interpretación Herbrand que sea un módelo de $C$.*

**Ejercicio 84 (02/2008)** *Dado el siguiento conjunto de cláusulas:*

$$\begin{array}{l} C_1 : \neg A(x, y) \vee \neg P(x) \vee Q(x) \\ C_2 : \neg A(x, y) \vee \neg R(f(x)) \vee \neg Q(y) \\ C_3 : P(x) \vee \neg R(y) \\ C_4 : R(f(x)) \vee R(f(y)) \\ C_5 : A(x, f(x)) \end{array}$$

1. *demostrar mediante un árbol semántico que es insatisfacible;*
2. *encontrar un conjunto de instancias básicas de las cláusulas que justifique el resultado anterior, de acuerdo con el teorema de Herbrand.*

**Ejercicio 85 (02/2006)** *Dado el conjunto de fórmulas* $\{F_1, F_2, F_3\}$ *tal que*

$$\begin{array}{l} F_1 : \exists y \forall x (A(x, y) \to B(x) \wedge D(x, y)) \\ F_2 : \forall x (B(x) \to \exists y \neg D(x, y) \vee E(x)) \\ F_3 : \forall x \neg E(x) \end{array}$$

1. *calcular la forma clausular;*
2. *demostrar mediante un árbol semántico que no se puede deducir* $\forall x \exists y (\neg D(x, y) \vee B(y) \vee A(x, y)))$ *a partir de* $\{F_1\}$*. Justificar el resultado mediante un modelo de la forma clausular correspondiente.*

**Ejercicio 86 (06/2006)** *Dado el siguiente conjunto de cláusulas:*

$$S = \{\neg p(b) \vee q(y), \neg q(x) \vee p(y), \neg r(y) \vee q(a)\}$$

1. *encontrar una interpretación Herbrand que sea modelo de $S$;*
2. *encontrar una interpretación Herbrand que no sea modelo de $S$.*

**Ejercicio 87 (02/2007)** *Sea $[P_1, ..., P_n] \vdash Q$ una estructura deductiva $C$ su forma clausular, e $I$ uba interpretación de $C$ sobre un dominio $D$.*

1. *si la deducción $[P_1, ..., P_n] \vdash Q$ es correcta, ¿qué se puede decir de la satisfacibilidad de $C$?*
2. *si un conjunto de instancias básicas de cláusulas de $C$ es satisfacible, ¿qué se puede decir de $[P_1, ..., P_n] \vdash Q$?*
3. *¿cuál es la condición sobre el árbol semántico correspondiente para demostrar que $[P_1, ..., P_n] \vdash Q$ es incorrecta?*
4. *¿qué es una interpretación Herbrand de $C$, y cuál es su relación con el árbol semántico para $C$?*

**Ejercicio 88 (02/2007)** *Dado el siguiente conjunto de cláusulas:*

$$\begin{array}{l} C_1 : \neg B(x) \vee \neg C(x, f(x)) \vee D(x) \\ C_2 : \neg A(x, a) \vee B(x) \\ C_3 : \neg A(x, a) \vee C(a, x) \\ C_4 : A(x, y) \\ C_5 : \neg D(x) \end{array}$$

1. *demostrar mediante un árbol semántico que dicho conjunto es insatisfacible;*
2. *justificar la respuesta mediante el teorema de Herbrand.*

**Ejercicio 89 (09/2008)** *Definir un conjunto insatisfacible de instancias básicas de cláusulas del siguiente conjunto, y justificar el resultado.*

$$\{A(x, y) \vee A(y, x), \neg A(y, f(x)) \vee \neg A(z, z) \vee B(x), \neg B(z)\}$$

**Ejercicio 90 (09/2008)** *Dado el siguiente conjunto de cláusulas:*

$$\begin{array}{l} C_1 : \neg P(x, a) \vee Q(x) \\ C_2 : \neg Q(y) \vee P(b, y) \\ C_3 : \neg P(a, x) \vee \neg Q(y) \\ C_4 : P(x, b) \end{array}$$

1. *calcular el universo y la base de Herbrand;*
2. *decir, mediante un árbol semántico, si el conjunto es satisfacible;*
3. *definir dos interpretaciones de Herbrand, una modelo y una contramodelo del conjunto.*

**Ejercicio 91 (04/2009)** *Dadas las siguientes cláusulas:*

$$\begin{array}{l} C_1 : Q(g(y), y) \vee \neg R(y, f(y)) \\ C_2 : R(a, x) \\ C_3 : \neg Q(g(z), u) \vee P(f(u)) \end{array}$$

1. *definir una interpretación de Herbrand que demuestre que la fórmula $P(a)$ no se deduce de $\{C_1, C_2, C_3\}$. Para ello, define explícitamente el universo y base de Herbrand;*
2. *demostrar mediante un árbol semántico que la fórmula $\exists x P(x)$ se deduce de $\{C_1, C_2, C_3\}$;*
3. *a la vista del anterior árbol semántico, aplica el teorema de Herbrand para así demostrar que el conjunto $\{C_1, C_2, C_3\} \cup \{\neg P(x)\}$ es insatisfacible.*

**Solución 20**

1.

$$H = \{a, f^n(a), g^n(a), f^n(g^m(a)), g^n(f^m(a))\}$$

$$BH = \{P(t_1), Q(t_1, t_2), R(t_1, t_2)\}_{t_1, t_2 \in H}$$

$$IH(P(a)) = \mathbf{f}, \quad IH(P(f(t))) = \mathbf{v}, \quad IH(R(a, t)) = \mathbf{v}, \quad IH(Q(g(t), t)) = \mathbf{v}$$

*Para el resto de átomos de BH, su interpretación puede ser* $\mathbf{v}$ *o* $\mathbf{f}$*. Esta interpretación verifica $\{C_1, C_2, C_3\}$ al tiempo que falsa $P(a)$.*

2. *Sea $C_4 : \neg P(x)$ la cláusula resultante de negar $\exists x P(x)$. Un árbol semántico que resulta cerrado es el siguiente:*
   - *Nivel 1: $P(f(a)) = \mathbf{v}$; fallo en $C_4$ - $\{x/a\} \to \neg P(f(a))$*
   - *Nivel 1: $P(f(a)) = \mathbf{f}$*
   - *Nivel 2: $R(a, f(a)) = \mathbf{v}$*
   - *Nivel 2: $R(a, f(a)) = \mathbf{f}$; fallo en $C_2$ - $\{x/a\} \to R(a, f(a))$*
   - *Nivel 3: $Q(g(a), a)) = \mathbf{v}$; fallo en $C_3$ - $\{z/a, u/a\} \to \neg Q(g(a), a) \vee P(f(a))$*
   - *Nivel 3: $Q(g(a), a)) = \mathbf{f}$; fallo en $C_1$ - $\{y/a\} \to Q(g(a), a) \vee \neg R(a, f(a))$*

   *Puesto que este árbol semántico es cerrado, no existe una sola interpretación de Herbrand que satisfaga $\{C_1, C_2, C_3, C_4\}$, luego este conjunto de cláusulas es insatisfacible.*
3. *El conjunto formado por las cláusulas que etiquetan los nodos fallo del anterior árbol semántico*

$$\{\neg P(f(a)),\ R(a, f(a)),\ \neg Q(g(a), a) \vee P(f(a)),\ Q(g(a), a) \vee \neg R(a, f(a))\}$$

   *(a) es finito; (b) es insatisfacible; (c) contiene sólo cláusulas que son instancias básicas de $\{C_1, C_2, C_3, C_4\}$. Por tanto, aplicando el Teorema de Herbrand, $\{C_1, C_2, C_3, C_4\}$ es insatisfacible.*

**Ejercicio 92 (07/2009)** *Dado el siguiente conjunto $C$ de cláusulas:*

$$\begin{array}{ll} C_1 : \neg p(x, f(b)) \vee q(x) & C_5 : \neg t(z) \\ C_2 : s(b, b) & C_6 : r(f(v)) \vee \neg p(y, f(y)) \\ C_3 : \neg r(a) & C_7 : s(v, w) \vee t(b) \\ C_4 : \neg q(x) \vee \neg s(g(x), h(x)) & \end{array}$$

1. *demostrar que dicho conjunto es satisfacible, encontrando una interpretación de Herbrand que sea un modelo de $C$;*
2. *encontrar una interpretación de Herbrand que sea un contramodelo de $C$;*
3. *demostrar, mediante un árbol semántico, que la fórmula $\exists z(s(b, z) \wedge \neg p(b, f(z)))$ es deducible a partir de $C$;*
4. *encontrar una sustitución que, si se aplica a la cláusula $C_5$, haga imposible la deducción del apartado (3);*
5. *considerar el conjunto de cláusulas básicas extraído del árbol semántico del apartado (3): ¿es satisfacible?, ¿en razón de qué resultado? enunciar el resultado y justificar su aplicación en este caso concreto.*

**Solución 21** 1. *para demostrar que este conjunto es satisfacible basta con proporcionar una interpretación de Herbrand que sea un modelo. Concretamente, un modelo sencillo puede ser el siguiente: una interpretación cualquiera que asigne a los predicados los siguientes valores de verdad:*

$$\forall x \forall y(s(x, y) = \mathbf{v}), \forall x(r(x) = \mathbf{f}), \forall x(t(x) = \mathbf{f}), \forall x \forall y(p(x, y) = \mathbf{f}), \forall x(q(x) = \mathbf{f})$$

   *que significa que, por ejemplo, $s$ es verdad para todo $x$ e $y$, $r$ es falso para todo $x$, etc. Dicha interpretación se define a partir del universo de Hebrand $H$ y de la base de Herbrand $B$:*

$$H = \{a, b, f(a), f(b), g(a), g(b), h(a), h(b),$$
$$f(f(a)), f(f(b)), f(g(a)), f(g(b)), f(h(a)), f(h(b)), g(f(a)), g(f(b)), g(g(a)), g(g(b)), \ldots\}$$

$$B = \{p(d', d''), q(d), r(d), s(d', d''), t(d) | \forall d, d', d'' \in H\}$$

   *La interpretación de Herbrand $I$, modelo del conjunto de cláusulas, se puede escribir como:*

$$I = \{s(d', d''), \neg r(d), \neg t(d), \neg p(d', d''), \neg t(d) | \forall d, d', d'' \in H\}$$

2. *cualquier interpretación que, por ejemplo, haga verdadero $r(a)$ es un contramodelo: $I = \{\ldots, r(a), \ldots\}$. Así que, por ejemplo, $\{A | A \in B\}$ (es decir, todos los átomos de la base aparecen afirmados) es un contramodelo (donde $H$ y $B$ son los mismos que en el apartado (1)). Naturalmente, hay muchos más ejemplos posibles de contramodelos;*
3. *como siempre, hay que negar la conclusión y sacar la forma clausular de la negación (en este orden). La forma clausular de $\neg \exists z(s(b, z) \wedge \neg p(b, f(z)))$ es*

$$C_0 = \neg s(b, z) \vee p(b, f(z))$$

   *el siguiente paso es sacar el árbol semántico completo de $\{C_0, .., C_7\}$ y ver que es cerrado...*
4. *para que el conjunto $\{C_0, ..., C_7\}$ sea insatisfacible (es decir, la deducción sea correcta) se necesita el "hecho" $\neg t(b)$, que es una instancia de (es decir, es implicado por) $C_5$; si se sustituye $C_5$ con una instancia suya que NO implique $\neg t(b)$, el conjunto de cláusulas se vuelve satisfacible. Por ejemplo, $\{z/a\}$ es una sustitución que genera $C_5' = \neg t(a)$ y hace que el conjunto $\{C_0, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5', C_6, C_7\}$ sea satisfacible (porque $\neg t(a)$ NO implica $\neg t(b)$). Entonces, $C_0$ no se puede deducir a partir de $\{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5', C_6, C_7\}$.*

5. el árbol semántico completo y cerrado del apartado (3) identifica un conjunto insatisfacible $S$ de instancias básicas, que son las que se hacen falsas en los nodos fallo.

$$\{\neg t(b), s(g(b), h(b)) \vee t(b), \neg q(b) \vee \neg s(g(b), h(b)), \neg p(b, f(b)) \vee q(b), \neg s(b, b) \vee p(b, f(b)), s(b, b)\}$$

*para toda $\delta \in S$, sea $n(\delta)$ el nodo fallo correspondiente (donde se hace falsa). Sabemos que dicho conjunto es insatisfacible porque, por definición de árbol semántico y de nodo fallo, cada instancia $\delta \in S$ se hace falsa en TODAS las interpretaciones cuya representación en el árbol es un camino que pasa por $n(\delta)$. Además, siendo el árbol cerrado, no hay ninguna interpretación que no pase por algún nodo fallo, es decir, que no falsifique alguna $\delta \in S$. Por lo tanto, ninguna interpretación es un modelo de $S$, así que $S$ es insatisfacible.*

**Ejercicio 93 (05/2010)** *Sean $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$, $G$ frmulas definidas en un lenguaje de primer orden. Sobre ellas tenemos la siguiente información:*

- $A$ es una tautología y $B$ es insatisfacible
- $C$ es satisfacible y $D$ es la negación de $C$
- no se sabe nada de $E$
- la interpretación concreta $I$ es contramodelo de $F$ y de $G$

*Para cada afirmación, decir SÍ, NO o DESC (si no se puede decir nada con esta información):*

1. $F \rightarrow G$ es satisfacible
2. $A \wedge C$ es satisfacible
3. $A \wedge C$ es verdad para la interpretación concreta $I$
4. $D \rightarrow C$ es verdad para la interpretación concreta $I$
5. $D \vee C$ es verdad para la interpretación concreta $I$
6. $A \wedge B$ es satisfacible
7. $A \wedge E$ es satisfacible
8. $D \wedge C$ es verdad para la interpretación concreta $I$
9. $A \wedge C \rightarrow B$ es insatisfacible

## 6 Métodos "básicos" de demostración automática

**Ejercicio 94 (06/2000)** *Dado el siguiente conjunto de cláusulas*

$$C = \{\neg q(a,x) \vee r(y),\quad p(y),\quad \neg r(b),\quad \neg p(f(x)) \vee q(z, f(x))\}$$

*y el conjunto de instancias básicas*

$$I = \{\neg q(a, f(a)) \vee r(b),\quad p(f(a)),\quad \neg r(b),\quad \neg p(f(a)) \vee q(b, f(a))\}$$

*estudiar mediante el método de Gilmore la satisfacibilidad de $I$. ¿Qué se puede decir de la satisfacibilidad de $C$?*

**Ejercicio 95 (06/2001)** *Dado el siguiente conjunto de cláusulas básicas:*

$$\left\{\begin{array}{c} \neg q(a) \vee r(c),\ p(b) \vee r(c) \vee \neg p(b),\ p(b) \vee \neg r(a), \\ \neg r(b) \vee p(a),\ p(a) \vee q(a) \vee r(c), r(a) \vee \neg p(b),\ p(b) \vee \neg r(c) \vee p(a), \\ p(c) \vee \neg r(b),\ r(a) \vee p(b) \vee \neg p(a),\ \neg q(a), \neg p(b) \vee \neg p(a) \end{array}\right\}$$

*A identificar las cláusulas tautológicas, los literales aislados y los literales puros;*

*B dar el conjunto final resultante de aplicar al conjunto de más arriba las reglas del método de Davis-Putnam correspondientes a (todo y sólo) lo identificado en (A);*

1. *dar el resultado de aplicar la regla de bifurcación sobre el literal $r(a)$ al conjunto del apartado (B);*
2. *seguir aplicando el método de Davis-Putnam a partir del resultado del apartado (C);*
3. *a la vista del resultado del apartado (D), decir si es o no satisfacible el conjunto inicial y por qué.*

**Ejercicio 96 (02/2003)** *Sean las siguientes cláusulas:*

$$\begin{array}{l} C_1 : \neg c \vee q \\ C_2 : \neg b \vee c \vee \neg d \\ C_3 : q \vee b \vee c \\ C_4 : d \vee q \end{array}$$

1. *escribir las cláusulas en forma implicativa (es decir con al menos una conectiva de implicación y con otras conectivas cualquier número de veces);*
2. *escribir las cláusulas resolvente indicadas a continuación:*
   $R_1$ : *resolvente de* $C_2$, $C_3$
   $R_2$ : *resolvente de* $R_1$, $C_1$
   $R_3$ : *resolvente de* $C_2$, $C_4$
   $R_4$ : *resolvente de* $R_2$, $C_4$
   $R_5$ : *resolvente de* $C_1$, $C_3$
   $R_6$ : *resolvente de* $R_5$, $R_3$
   $R_7$ : *resolvente de* $R_6$, $C_1$
3. *con el conjunto de cláusulas dadas y el de resolventes obtenidos en al apartado anterior, escribir una resolución lineal en la que intervengan algunas de las cláusulas indicadas (y ninguna nueva) y que permitan concluir que la fórmula $q$ se puede deducir o demostrar a partir del conjunto de fórmulas obtenido en el apartado (1);*
4. *como en el apartado anterior, pero encontrando una resolución no lineal; justificar la respuesta.*

**Ejercicio 97** 1. *Aplicar el método de Gilmore a las fórmulas siguientes, y decidir su satisfacibilidad:*
   (a) $(\neg p \vee q) \wedge \neg q \wedge p$
   (b) $(p \vee q) \wedge (r \vee q) \wedge \neg r \wedge \neg q$
   (c) $p \wedge q \wedge r$
   (d) $(p \vee q) \wedge (\neg p \vee q) \wedge r$
   (e) $(p \vee q) \wedge \neg q$
   (f) $(p \vee q) \wedge (\neg p \vee q) \wedge (\neg r \vee \neg q) \wedge (r \vee \neg q)$

2. *Aplicar el método de Davis-Putnam a las mismas.*

**Ejercicio 98** *Considerar las reacciones químicas siguientes:*

$$\begin{array}{c} MgO + H_2 \rightarrow Mg + H_2O \\ C + O_2 \rightarrow CO_2 \\ CO_2 + H_2O \rightarrow H_2CO_3 \end{array}$$

*y, suponiendo que hay una cantidad suficiente de $MgO$, $H_2$, $O_2$ y $C$, demostrar con Davis-Putnam que se puede producir $H_2CO_3$.*

**Ejercicio 99** *Demostrar con Davis-Putnam que la fórmula siguiente es válida:*

$$(((q \to p) \wedge (p \to q)) \to (\neg q \wedge \neg r)) \vee (((r \to p) \wedge (q \to s)) \to ((p \to r) \to (r \wedge s)))$$

**Ejercicio 100** *Demostrar por resolución básica que el siguiente conjunto de cláusulas es insatisfacible:*

$$\{p \vee q \vee r,\ \neg p \vee r,\ \neg q,\ \neg r\}$$

**Ejercicio 101** *Dado el conjunto* $S = \{p \vee q, \neg q \vee r, \neg p \vee q, \neg r\}$ *derivar por resolución básica la cláusula vacía.*

**Ejercicio 102 (04/2009)** *Dado el siguiente conjunto de cláusulas:*

$$\begin{gathered}\{p(a,c) \vee \neg q(b) \vee p(a,a), \neg q(b) \vee r(a) \vee \neg p(a,c), \neg p(c,a) \vee q(c) \vee r(b),\\ \neg p(a,b) \vee q(a), p(a,c), q(b) \vee p(a,a), \neg p(a,a) \vee \neg r(a) \vee p(a,b),\\ p(c,a) \vee \neg r(b) \vee q(c), \neg r(a) \vee \neg q(a), q(b) \vee \neg p(a,a), \neg q(b) \vee p(a,a) \vee \neg r(a)\}\end{gathered}$$

1. *aplica los siguientes pasos del método de Davis-Putnam: literales aislados, literales puros, y bifurcación sobre* $q(b)$.
2. *Determina la satisfacibilidad de los dos conjunto obtenidos por bifurcación, y, a la vista de ello, determina la satisfacibilidad del conjunto inicial.*

**Ejercicio 103 (05/2009)** *Dado el siguiente conjunto de cláusulas:*

$$\begin{gathered}\{ \qquad t(c) \vee s(c,c), \quad \neg s(c,c) \vee \neg t(c), \quad \neg s(a,c), \quad t(a) \vee \neg s(a,a) \vee r(f(c)),\\ s(c,c) \vee \neg t(e), \quad r(a) \vee \neg s(a,c), \quad \neg s(e,e) \vee t(c), \quad \neg r(f(c)) \vee t(e),\\ r(a) \vee s(e,e) \vee s(a,c) \vee \neg s(c,c) \vee \neg r(c), \quad r(c) \vee \neg r(a) \vee t(e), \quad t(e) \vee \neg t(c) \vee s(a,c), \}\end{gathered}$$

1. *aplica la regla de los* literales aislados *tachando aquellas cláusulas o literales según proceda;*
2. *si necesario, aplica la regla de los* literales puros *tachando aquellas cláusulas o literales según proceda;*
3. *si necesario, aplica la regla de* bifurcación *sobre las cláusulas remanentes tomando* $t(c)$ *como literal de bifurcación y generando dos conjuntos* $S'$ *y* $S''$*;*
4. *analiza la* satisfacibilidad *de* $S'$ *y* $S''$ *(aplicando Davis-Putnam o bien otro método conocido) y, a la vista de ello, determina la satisfacibilidad del conjunto inicial.*

**Solución 22** *Después de aplicar literales aislados:*

$$\begin{gathered}\{ \qquad t(c) \vee s(c,c), \quad \neg s(c,c) \vee \neg t(c), \quad t(a) \vee \neg s(a,a) \vee r(f(c)),\\ s(c,c) \vee \neg t(e), \quad \neg s(e,e) \vee t(c), \quad \neg r(f(c)) \vee t(e),\\ r(a) \vee s(e,e) \vee \neg s(c,c) \vee \neg r(c), \quad r(c) \vee \neg r(a) \vee t(e), \quad t(e) \vee \neg t(c) \ \}\end{gathered}$$

*Después de aplicar literales puros:*

$$\begin{gathered}\{ \ t(c) \vee s(c,c), \quad \neg s(c,c) \vee \neg t(c), \quad s(c,c) \vee \neg t(e), \quad \neg s(e,e) \vee t(c),\\ r(a) \vee s(e,e) \vee \neg s(c,c) \vee \neg r(c), \quad r(c) \vee \neg r(a) \vee t(e), \quad t(e) \vee \neg t(c) \ \}\end{gathered}$$

*(se note que* $\neg r(f(c))$ *se vuelve puro después de aplicar la regla por primera vez)*

*Con bifurcación sobre* $t(c)$ *se obtienen los dos conjuntos*

$$S' = \{\ s(c,c), \quad s(c,c) \vee \neg t(e), \quad \neg s(e,e), \quad r(a) \vee s(e,e) \vee \neg s(c,c) \vee \neg r(c), \quad r(c) \vee \neg r(a) \vee t(e), \quad \}$$

$$S'' = \{\ \neg s(c,c), \quad s(c,c) \vee \neg t(e), \quad r(a) \vee s(e,e) \vee \neg s(c,c) \vee \neg r(c), \quad r(c) \vee \neg r(a) \vee t(e), \quad t(e)\ \}$$

*Se ve fácilmente que* $S'$ *es satisfacible, mientras* $S''$ *es insatisfacible. Por lo tanto el conjunto inicial es satisfacible.*

**Ejercicio 104 (05/2009)** *Considera el siguiente conjunto de cláusulas:*

$$\begin{aligned}&C_1 : p(a) \vee q(f(a))\\ &C_2 : \neg r(x) \vee \neg q(x) \vee r(f(a))\\ &C_3 : \neg r(a) \vee \neg q(y)\\ &C_4 : p(a) \vee r(a)\\ &C_5 : \neg p(z)\end{aligned}$$

*Decide si el conjunto es satisfacible utilizando* resolución básica *con* saturación por niveles.

**Solución 23** *Con el nivel 0 del universo de Herbrand $H_0 = \{a\}$ hay las siguientes cláusulas básicas:*

$$\begin{array}{l} I_1 : p(a) \vee q(f(a)) \\ I_2 : \neg r(a) \vee \neg q(a) \vee r(f(a)) \\ I_3 : \neg r(a) \vee \neg q(a) \\ I_4 : p(a) \vee r(a) \\ I_5 : \neg p(a) \end{array}$$

*Por resolución no se puede deducir una contradicción. De hecho, hay un modelo: el que pone $p(a) = \mathbf{f}$, $q(f(a)) = \mathbf{v}$, $r(a) = \mathbf{v}$, $q(a) = \mathbf{f}$ y cualquier valor para $r(f(a))$.*
*Entonces hay que pasar a $H_1 = \{a, f(a)\}$. En este caso el conjunto de instancias es:*

$$\begin{array}{l} I_1 : p(a) \vee q(f(a)) \\ I_2^1 : \neg r(a) \vee \neg q(a) \vee r(f(a)) \\ I_2^2 : \neg r(f(a)) \vee \neg q(f(a)) \vee r(f(a)) \\ I_3^1 : \neg r(a) \vee \neg q(a) \\ I_3^2 : \neg r(a) \vee \neg q(f(a)) \\ I_4 : p(a) \vee r(a) \\ I_5^1 : \neg p(a) \\ I_5^2 : \neg p(f(a)) \end{array}$$

*A partir de estas instancias se puede obtener por resolución:*

$$\begin{array}{ll} R_1 : p(a) \vee \neg q(f(a)) & [I_3^2, I_4] \\ R_2 : \neg q(f(a)) & [R_1, I_5^1] \\ R_3 : p(a) & [I_1, R_2] \\ R_4 : \square & [R_3, I_5^1] \end{array}$$

*Entonces el conjunto es insatisfacible, y también el conjunto inicial lo es.*

**Ejercicio 105 (05/2009)** *Dado el siguiente conjunto de cláusulas:*

$$\begin{array}{c} \{ \quad \neg q(b) \vee r(a) \vee \neg p(a,c), \quad p(a,c) \vee \neg q(b) \vee p(a,a), \quad q(c) \vee r(b) \vee \neg p(c,a), \\ p(a,a) \vee q(b), \quad \neg p(a,b) \vee q(a), \quad p(c,a) \vee q(c) \vee \neg r(b), \quad \neg p(a,a) \vee \neg r(a) \vee p(a,b), \quad p(a,c), \\ \neg r(a) \vee \neg q(a), \quad q(b) \vee \neg p(a,a), \quad \neg q(b) \vee \neg r(a) \vee p(a,a) \quad \} \end{array}$$

1. *aplica la regla de los* literales aislados *tachando aquellas cláusulas o literales según proceda;*
2. *si necesario, aplica la regla de los* literales puros *tachando aquellas cláusulas o literales según proceda;*
3. *si necesario, aplica la regla de* bifurcación *sobre las cláusulas remanentes tomando $p(a,a)$ como literal de bifurcación y generando dos conjuntos $S'$ y $S''$;*
4. *analiza la* satisfacibilidad *de $S'$ y $S''$ (aplicando Davis-Putnam o bien otro método conocido) y, a la vista de ello, determina la satisfacibilidad del conjunto inicial.*

**Ejercicio 106 (05/2009)** *Considera el siguiente conjunto de cláusulas básicas:*

$$\{\neg r(e), \quad p(a) \vee q(c), \quad \neg p(a) \vee q(c) \vee r(e)\}$$

*Utilizando la regla de resolución, demuestra la insatisfacibilidad del conjunto. En caso de no ser ello posible, define una interpretación de Herbrand que demuestre la satisfacibilidad del conjunto.*

**Ejercicio 107 (05/2009)** *Considera el siguiente conjunto de cláusulas básicas:*

$$\begin{array}{l} C_1 : \neg s(z) \\ C_2 : s(a) \vee t(f(a)) \\ C_3 : \neg r(x) \vee \neg t(x) \vee r(f(a)) \\ C_4 : r(a) \vee s(a) \\ C_5 : \neg r(a) \vee \neg t(y) \end{array}$$

*Decide si el conjunto es satisfacible utilizando* resolución básica *con* saturación por niveles.

**Ejercicio 108 (05/2009)** *Dado el siguiente conjunto de cláusulas:*

$$\begin{array}{c} \{ \; p(a,c) \vee \neg q(b) \vee p(a,a), \quad \neg q(b) \vee r(a) \vee \neg p(a,c), \quad \neg p(c,a) \vee q(c) \vee r(b), \quad \neg p(a,b) \vee q(a), \quad p(a,c), \\ q(b) \vee p(a,a), \quad \neg p(a,a) \vee \neg r(a) \vee p(a,b), \quad p(c,a) \vee \neg r(b) \vee q(c), \\ \neg r(a) \vee \neg q(a), \quad q(b) \vee \neg p(a,a), \quad \neg q(b) \vee p(a,a) \vee \neg r(a) \quad \} \end{array}$$

1. *aplica la regla de los* literales aislados *tachando aquellas cláusulas o literales según proceda;*
2. *si necesario, aplica la regla de los* literales puros *tachando aquellas cláusulas o literales según proceda;*
3. *si necesario, aplica la regla de* bifurcación *sobre las cláusulas remanentes tomando $p(a,a)$ como literal de bifurcación y generando dos conjuntos $S'$ y $S''$;*
4. *analiza la* satisfacibilidad *de $S'$ y $S''$ (aplicando Davis-Putnam o bien otro método conocido) y, a la vista de ello, determina la satisfacibilidad del conjunto inicial.*

**Ejercicio 109 (05/2009)** *Dado el siguiente conjunto de clúsulas:*

$$\{p(a) \vee q(b), \quad \neg p(a) \vee \neg q(b) \vee r(c), \quad \neg r(c)\}$$

*Utilizando la regla de resolución, demuestra la insatisfacibilidad del conjunto. En caso de no ser ello posible, define una interpretación de Herbrand que demuestre la satisfacibilidad del conjunto.*

**Ejercicio 110 (05/2009)** *Dado el siguiente conjunto de clúsulas:*

$$\{p(a) \vee q(b), \quad \neg r(b) \vee \neg q(b) \vee r(c), \quad \neg r(c) \vee \neg q(b), \quad p(a) \vee r(b), \quad \neg p(a)\}$$

*Calcula el resolvente que resulta de aplicar la regla de resolución a los siguientes pares de cláusulas:*

- $p(a) \vee q(b), \qquad \neg p(a)$
- $\neg r(b) \vee \neg q(b) \vee r(c), \qquad \neg r(c) \vee \neg q(b)$

*Utilizando la regla de resolución, demuestra la insatisfacibilidad del conjunto. En caso de no ser ello posible, define una interpretación de Herbrand que demuestre la satisfacibilidad del conjunto.*

## 7 Unificación

**Ejercicio 111 (09/1994)** *¿Existe el unificador de máxima generalidad de las siguientes parejas de fórmulas atómicas? Justifíquese la respuesta y escríbase tanto el UMG resultado como la fórmula atómica obtenida.*

– $C(x, a, g(x)), C(b, y, z)$
– $B(y, f(x)), B(g(z), z)$

**Ejercicio 112 (06/1999)** *Justificar si son unificables o no las siguientes parejas de fórmulas atómicas. Caso de serlo, indíquese el UMG y la fórmula atómica resultado:*

– $R(f(x), f(x)), R(y, f(y))$
– $T(u, f(x), x), T(g(z), z, a)$
– $R(a, x), R(b, y)$

**Ejercicio 113 (09/1999)** *Dadas las siguientes fórmulas:*

$$F_1 : \forall x(\forall y(A(x, y) \vee B(y)) \rightarrow C(x) \vee D(x))$$
$$F_2 : \forall x \exists y(C(y) \rightarrow A(y, x))$$

*Resolver cada una de las cláusulas de la forma clausular de la fórmula $F_1$ con cada una de las cláusulas de la forma clausular de la fórmula $F_2$ de todas las formas posibles. Indicar sobre qué pares de literales podría resolverse, cuáles efectivamente resuelven y cuáles no y por qué. Obtener los resolventes resultantes y los UMG utilizados en cada caso.*

**Ejercicio 114 (09/2001)** *Identificar el unificador más general, si existe, o la razón por la que no existe, de los siguientes pares de literales:*

– $r(g(x), h(g(a))), \quad r(y, h(y))$
– $r(f(a), h(b)), \quad r(f(z), h(z))$
– $s(x, f(g(x), y), g(y), a), \quad s(b, f(z, w), z, w)$
– $t(x, f(y, x), g(y)), \quad t(v, f(w, g(w)), g(v))$

**Ejercicio 115 (06/2001)** *Encontrar, si existe, la sustitución que sea UMG de los siguientes pares de expresiones. Si no existe, decir por qué.*

– $q(a, y, g(a, y)), \quad q(z, x, g(z, f(x)))$
– $p(g(a), y, f(y), u), \quad p(x, f(x), z, g(z))$

**Ejercicio 116 (09/2002)** *¿Existe unificador de máxima generalidad de las siguientes parejas de fórmulas atómicas? justifíquese la respuesta y escríbase tanto el UMG resultante como la fórmula atómica obtenida tras la unificación.*

– $P(f(x, y), g(y), a), \quad P(f(t, z), t, z)$
– $Q(f(x), a, x), \quad Q(f(g(y)), y, z)$
– $R(x, a, f(x, y)), \quad R(g(z), t, f(z, b))$

**Ejercicio 117 (02/2003)** *Encontrar, si existe, el UMG de los siguientes pares de expresiones. Detallar el proceso de obtención del mismo y calcular el resultado de aplicar el umg a ambas expresiones, o bien justificar por qué no son unificables.*

– $Q(a, g(y, a), y), \quad Q(z, g(f(x), x), x)$
– $R(h(f(y)), v, b), \quad R(h(w), g(x, w), x)$

**Ejercicio 118 (06/2004)** *Estudiar si son unificables o no las siguientes parejas de fórmulas atómicas.*

– $P(h(x), g(x, z), z), \quad P(h(t), g(s, h(s)), t)$
– $Q(f(g(e)), g(z)), \quad Q(f(x), x)$

**Ejercicio 119** *Para cada una de las siguientes parejas de fórmulas atómicas determinar si son unificables o no y por qué; y caso de serlo, decir cuál es el unificador de máxima generalidad:*

– $F(a, f(x)), \quad F(y, b)$
– $H(f(a), g(a, y)), \quad H(f(x), g(x, b))$
– $P(x, x, y), \quad P(z, f(a), f(b))$
– $R(f(x), x), \quad R(y, f(y))$

**Ejercicio 120 (02/2006)** *Para cada una de las siguientes parejas de fórmulas atómicas determinar si son unificables o no y por qué; y caso de serlo, decir cuál es el unificador de máxima generalidad:*

– $P(z, x, f(h(x, z)))$, $\quad P(a, y, f(y))$
– $Q(x, f(a), g(g(y)))$, $\quad Q(z, f(z), g(y))$
– $R(z, f(y), g(y))$, $\quad R(x, x, z)$

**Ejercicio 121** *Sean*

$$\alpha = \{\ x/a,\ y/f(b),\ z/c\ \} \qquad\qquad \beta = \{\ v/f(f(a)),\ z/x,\ x/g(y)\ \}$$

– *calcular* $\alpha\beta$ *y* $\beta\alpha$
– *para cada una de las fórmulas siguientes, calcular (i)* $F\alpha$*; (ii)* $F\beta$*; (iii)* $F\alpha\beta$*; (iv)* $F\beta\alpha$
  1. $p(x, y, z)$;
  2. $p(h(v)) \vee \neg q(z, x)$
  3. $q(x, z, v) \vee \neg q(g(y), x, f(f(a)))$
– $\alpha$, $\beta$, $\alpha\beta$, $\beta\alpha$ *¿son idempotentes?*

**Ejercicio 122** *Para cada* $C_1$, $C_2$ *y* $\alpha$*, decidir si (i)* $\alpha$ *es un unificador de* $C_1$ *y* $C_2$*; y (ii)* $\alpha$ *es el UMG de* $C_1$ *y* $C_2$.

| $C_1$ | $C_2$ | $\alpha$ |
|---|---|---|
| $p(a, f(y), z)$ | $q(x, f(f(v)), b)$ | $\{\ x/a,\ y/f(b),\ z/b\ \}$ |
| $q(x, h(a, z), f(x))$ | $q(g(g(v)), y, f(w))$ | $\{\ x/g(g(v)),\ y/h(a, z),\ w/x\ \}$ |
| $q(x, h(a, z), f(x))$ | $q(g(g(v)), y, f(w))$ | $\{\ x/g(g(v)),\ y/h(a, z),\ w/g(g(v))\ \}$ |
| $r(f(x), g(y))$ | $r(z, g(v))$ | $\{\ x/a,\ z/f(a),\ y/v\ \}$ |

**Ejercicio 123** *Hallar, si es posible, el UMG de los siguientes pares de cláusulas.*

$\{q(a),\ q(b)\}$
$\{q(a, x),\ q(a, a)\}$
$\{q(a, x, f(x)),\ q(a, y, y)\}$
$\{q(x, y, z),\ q(u, h(v, v), u)\}$
$\{p(x_1, g(x_1), x_2, h(x_1, x_2), x_3, k(x_1, x_2, x_3)),\ p(y_1, y_2, e(y_2), y_3, f(y_2, y_3), y_4)\}$

**Ejercicio 124 (02/2009)**

1. *con el algoritmo de unificación hallar el UMG de los siguientes literales, explicando cómo trabaja el algoritmo;*

| | $L'$ | – | $L''$ |
|---|---|---|---|
| *A:* | $p(g(x, f(z)), b, y)$ | – | $p(g(a, x), y, f(f(x)))$ |
| *B:* | $q(a, g(h(x)), x, f(f(h(c))))$ | – | $q(z, g(y), b, f(f(y)))$ |

2. *factorizar las siguientes cláusulas:*
   *A:* $p(x, a) \vee q(b, b, g(x)) \vee p(f(z), y)$
   *B:* $r(y, a) \vee r(f(z), z) \vee s(y)$

**Solución 24**

1. *UMGs (las variables "primas" se refieren a* $L'$*, las variable "segundas" se refieren a* $L''$*):*

| $L'\alpha$ | $L''\alpha$ | $t'$ | $t''$ |
|---|---|---|---|
| $p(g(x', f(z')), b, y')$ | $p(g(a, x''), y'', f(f(x'')))$ | $x'$ | $a$ |
| | | | $\alpha = \{x'/a\}$ |
| $p(g(a, f(z')), b, y')$ | $p(g(a, x''), y'', f(f(x'')))$ | $f(z')$ | $x''$ |
| | | | $\alpha = \{x'/a,\ x''/f(z')\}$ |
| $p(g(a, f(z')), b, y')$ | $p(g(a, f(z')), y'', f(f(f(z'))))$ | $b$ | $y''$ |
| | | | $\alpha = \{x'/a,\ x''/f(z'),\ y''/b\}$ |
| $p(g(a, f(z')), b, y')$ | $p(g(a, f(z')), b, f(f(f(z'))))$ | $y'$ | $f(f(f(z')))$ |
| | | | $\alpha = \{x'/a,\ x''/f(z'),\ y''/b,\ y'/f(f(f(z')))\}$ |
| $p(g(a, f(z')), b, f(f(f(z'))))$ | $p(g(a, f(z')), b, f(f(f(z'))))$ | | |

| $L'\alpha$ | $L''\alpha$ | $t'$ | $t''$ |
|---|---|---|---|
| $q(a,g(h(x')),x',f(f(h(c))))$ | $q(z'',g(y''),b,f(f(y'')))$ | $a$ | $z''$ |
| | | $\alpha=\{z''/a\}$ | |
| $q(a,g(h(x')),x',f(f(h(c))))$ | $q(a,g(y''),b,f(f(y'')))$ | $h(x')$ | $y''$ |
| | | $\alpha=\{z''/a,\ y''/h(x')\}$ | |
| $q(a,g(h(x')),x',f(f(h(c))))$ | $q(a,g(h(x')),b,f(f(h(x'))))$ | $x'$ | $b$ |
| | | $\alpha=\{z''/a,\ y''/h(b),\ x'/b\}$ | |
| $q(a,g(h(b)),b,f(f(h(c))))$ | $q(a,g(h(b)),b,f(f(h(b))))$ | $c$ | $b$ |
| | | | *fail* |

2. *Cláusulas factorizadas:*

| | $C'$ | $\alpha$ |
|---|---|---|
| $A$ | $p(f(z),a)\vee q(b,b,g(f(z)))$ | $\{x/f(z),\ y/a\}$ |
| $B$ | $r(f(a),a)\vee s(f(a))$ | $\{y/f(a),\ z/a\}$ |

**Ejercicio 125 (05/2009)** *Para los siguientes pares de fórmulas atómicas, encontrar, si existe, el unificador de máxima generalidad (UMG). Detallar el proceso de obtención del UMG.*

$$P(x,f(g(u),u),g(x)) \qquad P(h(y),f(z,h(a)),z)$$
$$Q(g(x,y),h(x,y)) \qquad Q(g(z,u),h(w,u)) \qquad Q(g(t,t),h(v,f(v)))$$

**Ejercicio 126 (06/2009)** *Para los siguientes pares de átomos, encontrar, si existe, el unificador de máxima generalidad. Aplicar el algoritmo conocido y detallar el proceso de cálculo del UMG en la tabla siguiente, usando una fila para cada paso.*

| *Discordancias ($t_a$ y $t_b$)* | *Nueva ligadura obtenida* | *Unificador* | *Fórmulas obtenidas aplicando el unificador* |
|---|---|---|---|
| ///// | ///// | $\lambda$ | $p(a,w,g(v,v),h(w,w)),\quad p(z,h(b,f(y)),g(y,x),y)$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |

| *Discordancias ($t_a$ y $t_b$)* | *Nueva ligadura obtenida* | *Unificador* | *Fórmulas obtenidas aplicando el unificador* |
|---|---|---|---|
| ///// | ///// | $\lambda$ | $q(h(y),f(z,h(a)),z),\quad q(x,f(g(u),u),g(x))$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |

**Solución 25**

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | $\lambda$ | $p(a,\ w,\ g(v,v),\ h(w,w))$,<br>$p(z,\ h(b,f(y)),\ g(y,x),\ y)$ |
| $a,z$ | $z/a$ | $\{z/a\}$ | $p(a,\ w,\ g(v,v),\ h(w,w))$,<br>$p(a,\ h(b,f(y)),\ g(y,x),\ y)$ |
| $w,h(b,f(y))$ | $w/h(b,f(y))$ | $\{z/a,w/h(b,f(y))\}$ | $p(a,\ h(b,f(y)),\ g(v,v),\ h(h(b,f(y)),h(b,f(y))))$,<br>$p(a,\ h(b,f(y)),\ g(y,x),\ y)$ |
| $v,y$ | $v/y$ | $\{z/a,w/h(b,f(y)),$<br>$v/y\}$ | $p(a,\ h(b,f(y)),\ g(y,y),\ h(h(b,f(y)),h(b,f(y))))$,<br>$p(a,\ h(b,f(y)),\ g(y,x),\ y)$ |
| $y,x$ | $y/x$ | $\{z/a,w/h(b,f(x)),$<br>$v/x,y/x\}$ | $p(a,\ h(b,f(x)),\ g(x,x),\ h(h(b,f(x)),h(b,f(x))))$,<br>$p(a,\ h(b,f(x)),\ g(x,x),\ x)$ |
| $h(h(b,f(x)),h(b,f(x))),x$ | *fallo:* | $t_b$ *aparece en* $t_a$ | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | $\lambda$ | $q(h(y),\ f(z,h(a)),\ z),$<br>$q(x,\ f(g(u),u),\ g(x))$ |
| $h(y),x$ | $x/h(y)$ | $\{x/h(y)\}$ | $q(h(y),\ f(z,h(a)),\ z),$<br>$q(h(y),\ f(g(u),u),\ g(h(y)))$ |
| $z,g(u)$ | $z/g(u)$ | $\{x/h(y),z/g(u)\}$ | $q(h(y),\ f(g(u),h(a)),\ g(u)),$<br>$q(h(y),\ f(g(u),u),\ g(h(y)))$ |
| $h(a),u$ | $u/h(a)$ | $\{x/h(y),z/g(h(a)),u/h(a)\}$ | $q(h(y),\ f(g(h(a)),h(a)),\ g(h(a))),$<br>$q(h(y),\ f(g(h(a)),h(a)),\ g(h(y)))$ |
| $a,y$ | $y/a$ | $\{x/h(a),z/g(h(a)),u/h(a),y/a\}$ | $q(h(a),\ f(g(h(a)),h(a)),\ g(h(a))),$<br>$q(h(a),\ f(g(h(a)),h(a)),\ g(h(a)))$ |

**Ejercicio 127 (02/2006)** *(a) definir el teorema de Herbrand y explicar cómo se usa en los métodos de Gilmore y Davis-Putnam. (b) ¿Existe un UMG para los siguientes pares de fórmulas atómicas? Justificar la respuesta y proporcionar el UMG si existe.*

1. $P(z,x,f(h(x,z))), \qquad P(a,y,f(y))$
2. $Q(x,f(a),g(g(y))), \qquad Q(z,f(z),g(y))$
3. $R(z,f(y),g(y)), \qquad R(x,x,z)$

**Ejercicio 128 (02/2007)** *Hallar, si es posible, el UMG de los siguientes pares de literales. Si no es posible, decir por qué.*

*(a)* $R(h(a,x),a,x), \qquad R(h(y,f(z)),y,z)$
*(b)* $P(u,g(y),y,f(a)), \qquad P(f(z),z,g(x),x)$

**Ejercicio 129 (09/2008)** *¿Existe un UMG para los siguientes pares de fórmulas atómicas? Justificar.*

$P(h(x),g(x,z),z), \qquad P(h(t),g(s,h(s)),t)$
$R(f(x),a,x), \qquad R(f(g(y)),y,z)$

**Ejercicio 130 (07/2009)** *Para los siguientes pares de fórmulas atómicas, encontrar, si existe, el unificador de máxima generalidad (UMG), y en este caso especificar la fórmula resultante de aplicarlo sobre las fórmulas atómicas. Detallar el proceso de obtención del UMG en la tabla correspondiente, donde* $D$ *representa el conjunto de discordancias a resolver para conseguir la unificación,* $\alpha$ *representa la sustitución que progresivamente acaba definiendo el UMG (si existe), y* $\beta$ *representa la sustitución que contiene a la ligadura que resuelve una discordancia.*

*(a)* $p(f(x,g(x)),h(y),t)\ p(y,h(t),f(g(z),w))$
*(b)* $p(x,a,g(x),b) \qquad p(f(z,y),z,g(f(t,w)),t)$

**Solución 26**

*(a)*

| $\beta$ | $\alpha$ | $D$ |
|---|---|---|
| $-$ | $\lambda$ | $\{(f(x,g(x)),y),(y,t),(t,f(g(z),w))\}$ |
| $\{y/f(x,g(x))\}$ | $\{y/f(x,g(x))\}$ | $\{(f(x,g(x)),t),(t,f(g(z),w))\}$ |
| $\{t/f(x,g(x))\}$ | $\{y/f(x,g(x)),t/f(x,g(x))\}$ | $\{(f(x,g(x)),f(g(z),w))\}$ |
| $\{x/g(z)\}$<br>$\{w/g(g(z))\}$ | $\{y/f(g(z)),g(g(z))),t/f(g(z),g(g(z))),x/g(z)\}$<br>$\{y/f(g(z)),g(g(z))),t/f(g(z),g(g(z))),x/g(z),w/g(g(z))\}$ | $\{(f(g(z),g(g(z))),f(g(z),w))\}$ |

*Fórmula resultante de aplicar el UMG:* $p(f(g(z),g(g(z))),h(f(g(z))),f(g(z),g(g(z))))$ *(b)*

| $\beta$ | $\alpha$ | $D$ |
|---|---|---|
| $-$ | $\lambda$ | $\{(x,f(z,y)),(a,z),(x,f(t,w)),(b,t)\}$ |
| $\{x/f(z,y)\}$ | $\{x/f(z,y)\}$ | $\{(a,z),(f(z,y),f(t,w)),(b,t)\}$ |
| $\{z/a\}$ | $\{x/f(a,y),z/a\}$ | $\{(f(a,y),f(t,w)),(b,t)\}$ |
| $\{t/a\}$ | $\{x/f(a,y),z/a,t/a\}$ | $\{(f(a,y),f(a,w)),(b,a)\}$ |

*La discordancia* $(b,a)$ *no puede resolverse, al ser ambos términos constantes distintas, por tanto no existe UMG.*

## 8 Resolución con UMG

**Ejercicio 131 (06/1988)** *Estudiar, utilizando el método de resolución, si* $T[F_1, F_2, F_3, F_4] \vdash B$*, siendo:*

$$\begin{aligned} F_1 &: \exists x P(x) \\ F_2 &: \forall x R(x) \\ F_3 &: \forall x(\forall y(R(y) \land P(x)) \to Q(s(x))) \\ F_4 &: \forall x(Q(x) \to P(s(x))) \\ B &: \exists x P(s(s(s(s(x))))) \end{aligned}$$

*con* $x$*,* $y$ *símbolos de variable,* $s$ *símbolo de función unaria, y* $P$*,* $Q$*,* $R$ *símbolos de predicados unarios. Repetir el análisis siendo* $B = \forall x P(x)$*.*

**Ejercicio 132 (09/1989)** *Demostrar, mediante resolución, la insatisfacibilidad del siguiente conjunto de cláusulas:*

$$\begin{aligned} C_1 &: M(a, f(c), f(b)) \\ C_2 &: M(x, x, f(x)) \\ C_3 &: \neg M(x, y, z) \lor M(y, x, z) \\ C_4 &: \neg M(x, y, z) \lor N(x, z) \\ C_5 &: P(a) \\ C_6 &: \neg N(a, b) \\ C_7 &: \neg M(y, z, u) \lor \neg P(x) \lor \neg N(x, u) \lor N(x, y) \lor N(x, z) \end{aligned}$$

**Ejercicio 133** *Comprobar por el Método de resolución la validez de* $T[A_1, A_2, A_3] \vdash Q$*, siendo:*

$$\begin{aligned} A_1 &: \exists x P(x) \to \forall x Q(x) \\ A_2 &: \exists x \forall z(\neg \exists y R(x, y, z) \land P(z) \land L(x)) \\ A_3 &: \forall x \exists z((\neg T(x) \lor \exists y R(x, y, z)) \land (\neg L(z) \lor \neg T(x))) \\ Q &: \exists x \exists y \neg(Q(x) \to T(y)) \end{aligned}$$

**Ejercicio 134 (02/1989)** *Estudiar, utilizando el método de resolución, si* $T[F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6] \vdash G$*, siendo:*

$$\begin{aligned} F_1 &: B(c) \land P(a) \\ F_2 &: \forall x(R(x) \to O(x, c) \lor L(x, c)) \\ F_3 &: A(a, c) \\ F_4 &: \forall x(P(x) \to R(x)) \\ F_5 &: \forall x \exists y L(x, y) \\ F_6 &: \forall x \forall y(\neg A(x, y) \lor \neg B(y) \lor \neg L(x, y)) \\ G &: \exists x O(x, c) \end{aligned}$$

**Ejercicio 135 (02/1990)** *Comprobar que es insatisfacible el siguiente conjunto de formulas utilizando el Método de resolución:*

$$\begin{aligned} F_1 &: \forall x \exists y(E(x) \land \neg V(x) \to S(x, y) \land C(y)) \\ F_2 &: \exists x(P(x) \land E(x) \land \forall y(S(x, y) \to P(y))) \\ F_3 &: \forall x \forall y(P(x) \to \neg(C(x) \lor V(x))) \end{aligned}$$

**Ejercicio 136 (09/1990)** *Estudiar, utilizando el método de resolución, si* $T[F_1, F_2, F_3] \vdash G$*, siendo:*

$$\begin{aligned} F_1 &: \forall x \neg \exists y(\neg H(x, y) \land P(y) \land \neg T(y)) \\ F_2 &: \forall x \exists y \forall z(A(x, y) \land \neg T(y) \land (H(z, y) \lor T(x))) \\ F_3 &: \forall x \neg P(x) \\ G &: \exists x \exists y \neg(A(x, y) \land H(x, y) \to P(y)) \end{aligned}$$

**Ejercicio 137 (06/1991)** *Estudiar, utilizando el método de resolución, si* $T[A_1, A_2] \vdash B$*, siendo:*

$$\begin{aligned} A_1 &: \forall x(P(x) \to \exists y Q(x, y)) \\ A_2 &: \forall x \forall y(Q(x, y) \to P(f(y))) \\ B &: \forall x(P(x) \to \exists y P(f(y))) \end{aligned}$$

**Ejercicio 138 (09/1991)** *Estudiar, utilizando el método de resolución, si* $T[A_1, A_2] \vdash B$*, siendo:*

$$\begin{aligned} A_1 &: \forall x \exists y(A(x, y) \lor B(x, y)) \to \exists x \forall y C(x, y) \\ A_2 &: \forall x D(x) \to \forall x \forall y A(x, y) \\ B &: \exists x(\exists y(D(x) \land B(x, y)) \to \forall y C(x, y)) \end{aligned}$$

**Ejercicio 139 (02/1992)** *Estudiar, utilizando el método de resolución, si* $T[A_1, A_2, A_3] \vdash B$ *siendo:*

$$\begin{aligned} A_1 &: \forall x \forall y (R(y) \vee \neg P(x,y) \rightarrow \neg A(x)) \\ A_2 &: \exists x \forall y (A(x) \wedge (P(x,y) \rightarrow B(x))) \\ A_3 &: \forall x \forall y (\neg B(x) \vee (R(y) \vee C(y))) \\ B &: \exists x C(x) \end{aligned}$$

**Ejercicio 140 (09/1992)** *Dada la siguiente estructura deductiva* $T[F_1, F_2, F_3, F_4] \vdash Q$*, con:*

$$\begin{aligned} F_1 &: \forall x \forall y (A(x,y) \rightarrow B(x,y) \wedge C(y)) \\ F_2 &: \exists x \forall y (D(x) \rightarrow \neg B(x,y)) \\ F_3 &: \exists x \forall y (C(x) \rightarrow D(y)) \\ F_4 &: \forall x \forall z (\forall y A(x,y) \rightarrow \exists y \neg E(z,y)) \\ Q &: \exists x \exists y (A(x,y) \rightarrow E(a,b)) \end{aligned}$$

*comprobar su validez por el método de resolución tomando como cláusula raíz la cláusula o alguna de las cláusulas obtenidas de la conclusión.*

**Ejercicio 141 (02/1992)** *Estudiar, utilizando el método de resolución, si* $T[F_1, F_2, F_3] \vdash B$ *siendo:*

$$\begin{aligned} F_1 &: \forall x \exists y (A(x,y) \rightarrow \neg P(x)) \\ F_2 &: \exists x \forall y (\neg R(y,x) \vee P(x)) \\ F_3 &: \forall x \forall y (A(x,y) \wedge S(x)) \\ F_4 &: \exists x S(x) \\ B &: \forall x \exists y \neg R(x,y) \end{aligned}$$

**Ejercicio 142 (09/1992)** *Estudiar, utilizando el método de resolución, si* $T[F_1, F_2, F_3] \vdash G$ *siendo:*

$$\begin{aligned} F_1 &: \forall x (\neg B(x,x) \wedge D(x)) \\ F_2 &: \exists x (D(x) \rightarrow \forall y \neg B(x,y)) \\ F_3 &: \exists x (\neg A(x) \vee \neg E(x)) \\ G &: \forall x (A(x) \rightarrow E(x)) \end{aligned}$$

**Ejercicio 143 (09/1993)** *Estudiar, utilizando el método de resolución, si* $T[] \vdash B$*, siendo* $B$*:*

$$\exists x \exists y (A(x) \wedge \neg B(x,y)) \vee \neg \forall x \exists y (B(x,y) \rightarrow C(y)) \vee \exists x C(x) \vee \exists x \forall y (A(x) \wedge B(x,y))$$

**Ejercicio 144 (09/1993)** *Dado el conjunto de fórmulas* $\{F_1, F_2, F_3, F_4\}$*:*

$$\begin{aligned} F_1 &: \forall z \exists x ((\neg P(z) \vee \exists y Q(x,y,z)) \wedge (\neg R(z) \vee \neg P(x))) \\ F_2 &: \exists z S(z) \rightarrow \forall z T(z) \\ F_3 &: \forall z \forall x (T(z) \rightarrow P(x)) \\ F_4 &: \exists z \forall y (\neg \exists x Q(z,x,y) \wedge S(y) \wedge R(z)) \end{aligned}$$

*Demostrar la insatisfacibilidad de este conjunto de fórmulas utilizando el método de resolución.*

**Ejercicio 145 (02/1993)** *Estudiar, utilizando el método de resolución, si* $T[F_1, F_2, F_3] \vdash G$ *siendo:*

$$\begin{aligned} F_1 &: \forall y (\neg \forall x (A(x) \wedge B(y)) \rightarrow C(a,y)) \\ F_2 &: \forall x \forall y (D(x,y) \rightarrow \neg C(x,y)) \\ F_3 &: A(a) \vee B(b) \rightarrow \forall x D(x,b) \\ G &: A(a) \leftrightarrow B(b) \end{aligned}$$

**Ejercicio 146 (09/1994)** *¿Es posible deducir la cláusula vacía a partir de los siguientes conjuntos de cláusulas?*

- $\{\neg B(x, f(y)), B(a,x) \vee C(x), B(b,x) \vee \neg C(x)\}$
- $\{A(x), \neg A(y) \vee B(a,y), \neg B(b,z)\}$

*Caso de no ser posible la deducción de la cláusula vacía, encontrar una interpretación Herbrand modelo del conjunto, utilizando el árbol semántico.*

**Ejercicio 147 (02/1994)** *Estudiar, utilizando el método de resolución, si* $T[A_1, A_2] \vdash B$*, siendo:*

$$\begin{aligned} A_1 &: \exists x \neg A(x) \\ A_2 &: \exists y \forall x (B(x,y) \rightarrow C(x)) \\ B &: \exists x C(x) \vee \forall x (B(x,x) \vee A(x)) \end{aligned}$$

**Ejercicio 148 (02/1994)** *Aplicar resolución para deducir la cláusula vacía a partir del siguiente conjunto de cláusulas:*

$$\begin{aligned}
&C_1 : P(x,a) \vee \neg R(b,x) \vee Q(x)\\
&C_2 : R(x,a) \vee \neg Q(x)\\
&C_3 : \neg P(f(x),x) \vee Q(x)\\
&C_4 : \neg Q(f(x))\\
&C_5 : R(x,y)\\
&C_6 : \neg Q(a)
\end{aligned}$$

**Ejercicio 149** *Estudiar por resolución sobre el correspondiente conjunto de cláusulas si de $P_1, P_2, P_3$, donde*

$$\begin{aligned}
&P_1 : \forall x(A(x) \wedge B(x))\\
&P_2 : \forall x \neg A(x) \vee \exists y \forall x C(x,y)\\
&P_3 : \forall x \forall y \neg (C(x,y) \wedge D(x,y))
\end{aligned}$$

*es posible obtener cada una de las conclusiones siguientes:*

$$\begin{aligned}
&Q_1 : \forall x \exists y \neg D(x,y)\\
&Q_2 : \forall x \forall y (D(x,y) \to B(x))\\
&Q_3 : \exists x A(x) \to \neg \forall x \forall y D(x,y)
\end{aligned}$$

**Ejercicio 150 (02/1995)** *Teniendo en cuenta el Axioma de Igualdad ($\forall x \forall y \forall z(y = z \to (S(x,y) \to S(x,z)))$), analizar si de las fórmulas $\forall x \exists y \exists z(F(x,y) \wedge S(x,z))$ y $\forall x \forall y(F(x,y) \to \neg S(x,y))$ se puede deducir $\exists x \exists y \neg(x = y)$, utilizando el método de resolución.*

**Ejercicio 151 (02/1995)** *Estudiar, utilizando el método de resolución, si $T[A_1, A_2] \vdash B$, siendo:*

$$\begin{aligned}
A_1 &: \neg \exists x (A(a) \wedge C(x))\\
A_2 &: \exists x \forall y (\neg C(x) \to B(x,y))\\
B &: \forall x \exists y (\neg A(x) \vee B(x,y))
\end{aligned}$$

**Ejercicio 152 (06/1996)** *Estudiar, utilizando el método de resolución, si $T[A_1, A_2] \vdash B$, siendo:*

$$\begin{aligned}
A_1 &: \forall x \neg Q(x)\\
A_2 &: \forall x \exists y (P(x,y) \vee Q(y))\\
B &: \forall x \exists y P(x,y) \wedge \forall x Q(x)
\end{aligned}$$

**Ejercicio 153 (09/1997)** *Conocidas las fórmulas:*

$$\begin{aligned}
P_1 &: \forall x \forall y (M(x,y) \to Z(x,y))\\
P_2 &: \forall x \forall y (V(x) \to M(x,y))\\
P_3 &: \forall x \forall y \forall z (Z(x,y) \wedge Z(y,x) \to Z(x,z))\\
P_4 &: \forall x \forall y (L(x) \wedge B(y) \to Z(x,y))\\
P_5 &: \forall x \forall y (B(x) \wedge P(y) \to Z(x,y))\\
P_6 &: \forall x (P(x) \to V(x))\\
Q &: \forall x \forall y (\exists z B(z) \wedge L(x) \wedge P(y) \to Z(x,y))
\end{aligned}$$

1. *partiendo de la forma clausular de la estructura deductiva $T[P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6] \vdash Q$, aplicar resolución para determinar si se puede obtener la cláusula vacía.*
2. *¿Es insatisfacible el conjunto de cláusulas anterior? ¿Es $T[P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6] \vdash Q$ una estructura deductiva correcta? Justificar las respuestas apoyándose en el resultado anterior.*

**Ejercicio 154 (09/1997)** *Estudiar, utilizando el método de resolución, si $T[A_1, A_2] \vdash B$, siendo:*

$$\begin{aligned}
A_1 &: \neg \exists x \exists y (A(x,y) \wedge B(x) \wedge C(y))\\
A_2 &: \forall x (D(x) \to C(x))\\
B &: \forall x \forall y (A(x,y) \to \neg B(x) \vee \neg D(y))
\end{aligned}$$

**Ejercicio 155 (02/1998)** *Dadas*

$$\begin{aligned}
&C_l : P(a,x,a,a)\\
&C_2 : P(f(x,r),y,f(x,s),z) \vee \neg N(x,y) \vee \neg P(r,y,s,z)\\
&C_3 : P(f(x,r),y,z,f(x,s)) \vee \neg M(x,y) \vee \neg P(r,y,z,s)
\end{aligned}$$

1. *deducir por resolución la cláusula vacía a partir del conjunto:*

$$\{C_1, C_2, C_3\} \cup \{\neg P(f(1, f(3, a)), 2, x, y)\} \cup \{N(0, 1), N(1, 2), N(2, 3)\}$$
$$\cup\{M(3, 2), M(2, 1), M(1, 0)\}$$

2. *indicar los valores que toman $x$ e $y$ en la deducción anterior.*

**Ejercicio 156 (09/1998)** *Dado el siguiente conjunto de cláusulas, donde $A, D$ y $E$ son predicados binarios, $B$ y $C$ predicados unarios, $f$, $g$, $h$, son funciones unarias, $k$ es una función binaria y $a$ es un símbolo de constante:*

$$\left\{ \begin{array}{c} \neg A(x, f(x)) \vee B(x), \neg A(x, f(x)) \vee C(f(x)), \neg B(g(x)) \vee \neg D(x, h(x)), \\ \neg E(x, y) \vee C(x), D(k(x, x), y) \vee E(x, y), \neg C(a) \end{array} \right\}$$

1. *demostrar por resolución que de las fórmulas asociadas a dicho conjunto se puede deducir que $\exists x \exists y \neg A(x, y)$;*
2. *¿qué valores existen para $x$ e $y$ que permiten deducir $\neg A(x, y)$ en el apartado anterior? justificar la respuesta.*

**Ejercicio 157 (02/1998)** *Aplicar, si es posible, la regla de factorización a:*

$$C_1 : \neg M(x, a) \vee \neg M(y, a) \vee P(f(x, y), a)$$
$$C_2 : \neg M(x, a) \vee M(a, y) \vee P(f(x, y), a)$$

**Ejercicio 158 (09/1998)** *Sea $\{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}$ el conjunto de fórmulas siguiente:*

$$A_1 : \forall x \exists y (A(x, y) \rightarrow B(x) \wedge C(y))$$
$$A_2 : \neg \forall y C(y)$$
$$A_3 : \forall x (B(x) \rightarrow \exists x \exists y \neg D(x, y))$$
$$A_4 : \forall x \neg E(x)$$
$$A_5 : \forall x \forall y D(x, y) \vee \exists x E(x)$$

*Estudiar mediante resolución si, de $\{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}$, puede deducirse correctamente la fórmula $\exists x \exists y \neg A(x, y)$.*

**Ejercicio 159 (06/1998)** *Sea $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ el conjunto de fórmulas siguiente: siguiente:*

$$A_1 : R(b) \wedge G(b) \wedge R(a)$$
$$A_2 : \forall x (M(x) \rightarrow (G(x) \rightarrow P(x)) \wedge (\neg G(x) \rightarrow \neg P(x)))$$
$$A_3 : \forall x (R(x) \rightarrow M(x))$$
$$A_4 : \neg \exists x (R(x) \wedge \neg D(x))$$

*Partiendo del conjunto de cláusulas correspondientes a las fórmulas anteriores, estudiar mediante resolución que del enunciado $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ se deduce la fórmula $\exists x D(x) \wedge P(b)$.*

**Ejercicio 160 (02/1998)** *Estudiar, utilizando el método de resolución, si $T[A_1, A_2, A_3] \vdash B$ siendo:*

$$A_1 : \exists x \forall y (P(x, y) \rightarrow \neg R(x) \wedge S(y))$$
$$A_2 : \forall x (S(x) \rightarrow R(x))$$
$$A_3 : \forall x \forall y (T(x, y) \rightarrow P(x, y))$$
$$B : \forall x \exists y \neg T(x, y)$$

**Ejercicio 161 (02/1999)** *Sea $\{A_1, A_2, A_3\}$ el conjunto de fórmulas correspondiente a un enunciado:*

$$A_1 : \exists y \forall x (A(x, y) \rightarrow B(x) \wedge D(x, y))$$
$$A_2 : \forall x (B(x) \rightarrow \exists y \neg D(y, x) \vee E(x))$$
$$A_3 : \forall x \neg E(x)$$

*Estudiar mediante resolución que, del enunciado $\{A_1, A_2, A_3\}$, se deduce la fórmula $\exists x \exists y \neg A(x, y)$. Indicar los valores de las variables de la fórmula para los que se deduce.*

**Solución 27** *Véase los ejercicios resueltos de Luís Iraola.*

**Ejercicio 162 (06/1999)** *1. Estudiar por resolución si es insatisfacible el siguiente conjunto $C$ de cláusulas:*

$$C_0 : \neg p(x) \vee \neg r(x, y) \vee q(x)$$
$$C_1 : \neg d(x) \vee \neg r(x, y) \vee \neg q(y)$$
$$C_2 : \neg d(x) \vee p(x)$$
$$C_3 : d(f(x))$$
$$C_4 : d(a)$$
$$C_5 : r(x, f(x))$$

2. *Si se añade el predicado $resp(x, y)$ a la cláusula $C_0$, ¿qué valores toman $x$ e $y$ en la resolución anterior?*
3. *Encontrar un conjunto de instancias básicas de cláusulas de $C$ que sea finito e insatisfacible.*

**Ejercicio 163 (09/1999)** *Dado el siguiente conjunto de cláusulas:*

$$
\begin{array}{l}
C_1 : r(x) \vee p(x) \vee \neg q(h(x)) \\
C_2 : \neg r(x) \\
C_3 : p(y) \vee \neg s(y, h(y)) \vee r(y) \\
C_4 : \neg s(z, x) \\
C_5 : q(y) \vee r(y) \\
C_6 : s(f(x), x) \vee \neg p(f(x))
\end{array}
$$

*Demostrar que es insatisfacible utilizando resolución (y justificar por qué lo es).*

**Ejercicio 164 (06/2000)** *A partir del siguiente conjunto de cláusulas:*

$$
\begin{array}{l}
C_1 : \neg p(x, y, u) \vee \neg p(y, z, v) \vee \neg p(u, z, w) \vee p(x, v, w) \\
C_2 : \neg p(x, y, u) \vee \neg p(v, z, y) \vee \neg p(x, v, w) \vee p(u, z, w) \\
C_3 : p(x, e, x) \\
C_4 : p(x, i(x), e) \\
C_5 : p(i(x), x, e) \\
C_6 : \neg p(c, c, e)
\end{array}
$$

1. *dar todos los resolventes de la cláusula $p(e, x, x)$ con $C_1$, considerando también todas las cláusulas que se obtienen de $C_1$ por factorización;*
2. *demostrar la insatisfacibilidad del conjunto mediante resolución;*
3. *determinar un conjunto soporte, y a partir de él, decir si la refutación anterior es dirigida o no.*

**Ejercicio 165 (09/2000)** *1. Demuestra la insatisfacibilidad del siguiente conjunto de cláusulas mediante resolución lineal, empezando por $C_0$:*

$$
\begin{array}{l}
C_0 : \neg P(f(y), a, x) \\
C_1 : P(x, y, z) \vee \neg Q(g(x), f(y), v) \\
C_2 : Q(x, x, y) \vee \neg M(z, v, v) \\
C_3 : Q(g(z), v, y) \vee \neg T(z, v, y) \\
C_4 : T(g(y), f(x), z) \vee \neg M(a, b, x) \\
C_5 : T(z, z, b) \vee \neg S(z, v, a) \\
C_6 : S(a, b, c) \\
C_7 : S(f(x), y, a) \vee \neg L(x, y, z) \\
C_8 : L(a, b, c) \\
C_9 : L(b, a, c)
\end{array}
$$

2. *razona por qué es lineal la resolución realizada en el apartado anterior;*
3. *¿es input la resolución realizada en el apartado anterior? Justifica la respuesta.*

**Ejercicio 166 (06/2001)** *Obtener una refutación no lineal del siguiente conjunto de cláusulas, decir por qué no es lineal la refutación obtenida y en qué paso(s) de resolución deja de serlo.*

$$
\begin{array}{l}
C_1 : \neg A(x, y) \vee \neg P(x) \vee Q(x) \\
C_2 : \neg A(x, y) \vee \neg R(f(x)) \vee \neg Q(y) \\
C_3 : P(x) \vee \neg R(y) \\
C_4 : R(f(x)) \vee R(f(y)) \\
C_5 : A(x, f(x))
\end{array}
$$

**Ejercicio 167 (09/2001)** *Estudiar por resolución si es insatisfacible el siguiente conjunto de cláusulas:*

$$
\begin{array}{l}
C_1 : \neg P(x, y) \vee \neg Q(f(y), x) \\
C_2 : P(x, g(x)) \\
C_3 : R(x, a) \vee \neg P(b, g(x)) \vee R(z, z) \\
C_4 : Q(f(g(x)), a) \vee \neg R(x, a) \vee \neg R(a, y) \\
C_5 : P(x, g(y))
\end{array}
$$

**Ejercicio 168 (06/2002)** *Estudiar por resolución dirigida si es insatisfacible el siguiente conjunto de cláusulas, teniendo en cuenta que las cláusulas $C_2, C_3, C_4$ y $C_5$ forman el conjunto soporte:*

$$\begin{array}{l} C_1 : \neg Q(g(y), z) \vee P(z) \\ C_2 : P(x) \vee Q(x, f(x)) \\ C_3 : \neg P(f(x)) \vee R(x) \\ C_4 : \neg R(x) \vee Q(x, z) \\ C_5 : \neg P(g(f(a))) \end{array}$$

**Ejercicio 169 (09/2002)** *Dado el siguiente conjunto de cláusulas:*

$$\begin{array}{l} C_1 : \neg A(x) \vee B(f(x), g(x), x) \\ C_2 : \neg D(y) \vee E(x) \\ C_3 : \neg C(z) \vee \neg A(f(z)) \\ C_4 : \neg E(x) \vee A(y) \\ C_5 : \neg B(a, x, y) \\ C_6 : C(a) \\ C_7 : D(y) \end{array}$$

1. *demostrar mediante resolución que el conjunto anterior es insatisfacible;*
2. *la resolución anterior ¿es lineal?, ¿es input? justificar brevemente la respuesta.*

**Ejercicio 170 (06/2002)** *Dado el siguiente conjunto de cláusulas:*

$$\begin{array}{l} C_1 : p(a, c) \vee p(b, c) \\ C_2 : p(a, d) \\ C_3 : \neg p(x, c) \vee p(e, x) \\ C_4 : p(x, y) \vee p(y, f(x)) \vee p(z, f(z)) \\ C_5 : \neg p(v, f(v)) \end{array}$$

1. *deducir $\exists x p(e, x)$ a partir de las cláusulas $C_1, C_2$, $C_3$; obtener mediante extracción de respuestas, en un árbol de resolución lineal, los valores de $x$ para los que efectivamente se puede afirmar $p(e, x)$;*
2. *obtener razonadamente el UMG que permite derivar la cláusula $p(f(x), f(x))$ como resolvente de las cláusulas $C_4$ y $C_5$.*

**Ejercicio 171 (06/2003)** *Dado el siguiente conjunto de cláusulas:*

$$\begin{array}{l} C_1 : R(y) \vee \neg Q(f(x)) \\ C_2 : \neg B(x) \vee R(y) \vee R(g(x, y)) \\ C_3 : B(x) \vee R(b) \vee Q(x) \vee H(b) \\ C_4 : R(y) \vee \neg H(b) \end{array}$$

*Escribir una resolución que permita obtener el resolvente $R(b) \vee R(g(f(x), b))$.*

**Ejercicio 172 (06/2003)** *Demostrar que es insatisfacible el siguiente conjunto de cláusulas:*

$$\begin{array}{l} C_1 : A(x) \vee \neg B(g(x)) \vee C(x) \\ C_2 : \neg C(x) \\ C_3 : A(x) \vee C(x) \vee \neg D(x, g(x)) \\ C_4 : C(x) \vee \neg D(x, y) \\ C_5 : B(x) \vee C(x) \\ C_6 : \neg A(f(x)) \vee D(f(x), x) \end{array}$$

**Ejercicio 173 (09/2003)** *Encontrar una refutación no lineal del siguiente conjunto de cláusulas:*

$$\begin{array}{l} C_1 : A(x, f(x)) \\ C_2 : \neg B(x, y) \vee A(f(x), y) \\ C_3 : \neg C(f(x), y) \vee B(x, y) \\ C_4 : B(x, f(y)) \vee C(x, y) \\ C_5 : \neg A(x, x) \vee \neg B(y, x) \\ C_6 : \neg A(x, f(x)) \vee C(x, x) \vee D(x, x) \\ C_7 : \neg D(x, f(x)) \end{array}$$

**Ejercicio 174 (09/2004)** *Dado el siguiente conjunto de cláusulas:*

$$
\begin{array}{l}
C_1 : \neg P(x) \vee Q(x) \vee R(f(x)) \\
C_2 : \neg P(x) \vee Q(x) \vee S(x, f(x)) \\
C_3 : \neg Q(x) \vee \neg T(x) \\
C_4 : \neg R(x) \vee \neg T(x) \\
C_5 : \neg S(a, x) \vee T(x) \\
C_6 : P(a) \\
C_7 : T(a)
\end{array}
$$

1. *construir un árbol de resolución de la cláusula vacía a partir de dichas cláusulas;*
2. *el árbol de resolución de la cláusula vacía del punto anterior: ¿es lineal?, ¿Por qué?*

**Ejercicio 175 (06/2004)** *Comprobar mediante resolución que el siguiente conjunto de cláusulas es insatisfacible. Justificar la respuesta.*

$$
\begin{array}{l}
C_1 : \neg P(x, y) \vee \neg A(x) \vee B(y) \\
C_2 : \neg P(x, y) \vee \neg D(x) \vee \neg B(f(y)) \\
C_3 : \neg D(x) \vee A(x) \\
C_4 : D(f(x)) \vee D(f(y)) \\
C_5 : P(x, f(x))
\end{array}
$$

**Ejercicio 176 (09/2005)** *Demostrar que es insatisfacible el siguiente conjunto de cláusulas:*

$$
\begin{array}{l}
C_1 : A(x) \vee \neg B(h(x)) \vee C(x) \\
C_2 : \neg C(x) \\
C_3 : A(y) \vee C(y) \vee \neg D(y, h(y)) \\
C_4 : \neg D(x, y) \\
C_5 : B(y) \vee C(y) \\
C_6 : \neg A(f(x)) \vee D(f(x), x)
\end{array}
$$

**Ejercicio 177 (02/2005)** *Dado el siguiente conjunto de cláusulas:*

$$
\begin{array}{l}
C_1 : \neg R(x) \vee S(x) \vee Q(x, g(x)) \\
C_2 : \neg R(x) \vee S(x) \vee T(g(x)) \\
C_3 : R(a) \\
C_4 : \neg Q(a, y) \vee P(y) \\
C_5 : \neg P(x) \vee \neg T(x) \\
C_6 : \neg P(f(y)) \vee \neg S(y)
\end{array}
$$

1. *¿es correcto deducir $\exists x \neg P(f(x)) \wedge \exists y \neg P(y)$? justificar la respuesta utilizando el método de resolución;*
2. *la resolución anterior ¿es lineal?, ¿es input? justificar brevemente la respuesta.*

**Solución 28** *Negando $\exists x \neg P(f(x)) \wedge \exists y \neg P(y)$ y sacando su forma clausular se obtiene $C_0 = P(f(x)) \vee P(y)$. Para obtener la cláusula vacía hace falta factorizar $C_0$, que se convierte en $C_0' = P(f(x))$. Hay que notar que factorizar $C_0$ no quiere decir sustituirla con $C_0'$; más bien, quiere decir añadir $C_0'$ al conjunto que ya tenemos, sin quitar $C_0$.*

$$
\begin{array}{lcll}
R_1 & : & \neg S(y) & [C_0', C_6] \\
R_2 & : & \neg R(x) \vee T(g(x)) & [R_1, C_2] \\
R_3 & : & \neg R(x) \vee \neg P(g(x)) & [R_2, C_5] \\
R_4 & : & \neg P(g(a)) & [R_3, C_3] \\
R_5 & : & \neg Q(a, g(a)) & [R_4, C_4] \\
R_6 & : & \neg R(a) \vee S(a) & [R_5, C_1] \\
R_7 & : & S(a) & [R_6, C_3] \\
R_8 & : & \neg P(f(a)) & [R_7, C_6[ \\
R_9 & : & \Box & [R_8, C_0']
\end{array}
$$

*Esta refutación es claramente lineal e input: basta con mirar la última columna de la tabla.*

**Ejercicio 178 (06/2005)** *Dado el siguiente conjunto de cláusulas, obtener la cláusula vacía mediante una resolución no lineal.*

$$\begin{array}{l} C_1 : \neg P(x,y) \vee \neg Q(x,y) \vee \neg R(y) \\ C_2 : \neg P(x,y) \vee Q(y,x) \\ C_3 : \neg P(x,y) \vee S(y,x) \\ C_4 : R(x) \vee \neg S(x,x) \\ C_5 : P(x,f(x)) \\ C_6 : P(f(x),x) \\ C_7 : P(f(x),f(x)) \end{array}$$

**Ejercicio 179 (06/2007)** *Demostrar por resolución que el siguiente conjunto de cláusulas es insatisfacible:*

$$\begin{array}{l} C_1 : B(z,y) \vee \neg A(a,x) \vee C(f(y),g(x)) \\ C_2 : \neg C(y,g(z)) \vee B(y,z) \\ C_3 : \neg C(a,g(f(x))) \\ C_4 : \neg B(x,g(z)) \vee \neg B(f(y),y) \\ C_5 : A(x,y) \vee D(y,x) \\ C_6 : C(x,y) \vee \neg D(y,x) \end{array}$$

**Ejercicio 180** *Determinar si la cláusulas siguientes se pueden factorizar, y, en su caso, calcular sus factores.*

1. $p(x) \vee q(y) \vee p(f(x))$
2. $p(x) \vee p(a) \vee q(f(x)) \vee q(f(a))$
3. $p(x,y) \vee p(a,f(a))$
4. $p(a) \vee p(b) \vee p(x)$
5. $p(x) \vee p(f(y)) \vee q(x,y)$

**Ejercicio 181** *Encontrar los resolventes posibles de los siguientes pares de cláusulas.*

| $C$ | $D$ |
|---|---|
| $\neg p(x) \vee q(x,b)$ | $p(a) \vee q(a,b)$ |
| $\neg p(x) \vee q(x,x)$ | $\neg q(a,f(a))$ |
| $\neg p(x,y,u) \vee \neg p(y,z,v) \vee \neg p(x,v,w) \vee p(u,z,w)$ | $p(g(x,y),x,y)$ |
| $\neg p(v,z,v) \vee p(w,z,w)$ | $p(w,h(x,x),w)$ |

**Ejercicio 182** *Aplicar resolución (con refutación) para probar que la fórmula*

$$5 \quad m(5,f(7,f(5,f(1,0))))$$

*es una consecuencia del conjunto*

$$\begin{array}{ll} 1 & \neg m(x,0) \\ 2 & \neg i(x,y,z) \vee m(x,z) \\ 3 & \neg m(x,z) \vee \neg i(v,z,y) \vee m(x,y) \\ 4 & i(x,y,f(x,y)) \end{array}$$

*Nota: $f(4,f(3,f(2,f(1,0))))$ se puede ver como la lista $[4,3,2,1,0]$, así que $m$ puede representar la pertenencia a la lista.*
*Sugerencia: renombrar las variables cuándo necesario.*

**Ejercicio 183** *Dado el conjunto de cláusulas*

$$\{\ \neg r,\ r \vee \neg p \vee \neg q,\ p \vee \neg s \vee \neg t,\ p \vee \neg u,\ q,\ s,\ u\ \}$$

*dar una refutación SLD en forma de un árbol de resolución.*

**Ejercicio 184** *Dar una resolución SLD de las cláusulas siguientes:*

$C_1$ $p(a)$
$C_2$ $r(x)$
$C_3$ $q(s(x)) \vee \neg r(f(x)) \vee \neg p(x)$
$C_4$ $p(s(x)) \vee \neg q(x)$
$C_5$ $\neg p(s(x))$

*donde $\{C_1, C_2, C_3, C_4\}$ es el conjunto soporte, y $\{C_5\}$ es el conjunto objetivo.*

**Ejercicio 185 (02/2009)** *Dado el siguiente conjunto $\mathcal{C}$ de cláusulas:*

$C_1$: $\neg t(y)$
$C_2$: $p(x) \vee t(x) \vee \neg r(x, g(x))$
$C_3$: $r(h(z), z) \vee \neg p(h(z))$
$C_4$: $t(y) \vee \neg q(g(y)) \vee p(y)$
$C_5$: $\neg r(x, y)$
$C_6$: $q(x) \vee t(x)$

1. *probar que es insatisfacible por resolución input lineal;*
2. *elegir $\{C_2, C_3, C_4, C_5, C_6\}$ como conjunto soporte, ¿garantiza que existe una resolución dirigida? Decir por qué.*

**Solución 29** 1. *Resolución input lineal (a menudo se han renombrado las variables, y el número se refiere al número de la cláusula de la que vienen :*

$$\begin{array}{lcl} C_1, C_2 & \rightarrow & R_1 : \neg q(g(y_4)) \vee p(y_4) \\ R_1, C_6 & \rightarrow & R_2 : p(y_4) \vee t(g(y_4)) \\ R_2, C_3 & \rightarrow & R_3 : r(h(z_3), z_3) \vee t(g(h(z_3))) \\ R_3, C_1 & \rightarrow & R_4 : r(h(z_3), z_3) \\ R_4, C_5 & \rightarrow & \square \end{array}$$

2. *La respuesta correcta es: $\{C_2, C_3, C_4, C_5, C_6\}$ garantiza le existencia de una resolución dirigida por ser satisfacible.*
   *Para probar la satisfacibilidad, basta con proporcionar un modelo: por ejemplo, la interpretación que hace t siempre verdadero, p siempre falso y q siempre falso.*

**Ejercicio 186 (02/2009)** *Dado el siguiente conjunto de cláusulas*

$C_1$: $p(a, x, a)$
$C_2$: $p(f(x), y, z) \vee \neg p(x, y, z') \vee \neg q(y, z', z)$
$C_3$: $q(a, x, x)$
$C_4$: $q(f(y), x, f(z)) \vee \neg q(y, x, z)$

*hallar, por resolución SLD, una respuesta a la siguiente pregunta:*

$$\text{¿cuál } x \text{ hace verdadera a } p(f(f(a)), f(f(a)), x)?$$

**Solución 30** *Notamos que esto se puede traducir directamente a un program lógico: la respuesta para el objetivo $\neg p(f^m(a), f^n(a), x_0) \vee ans(x_0)$ es $x_0 = f^{mn}(a)$.*

*En este caso, el objetivo inicial es $G = \neg p(f(f(a)), f(f(a)), x_0) \vee ans(x_0)$, y la respuesta es $f(f(f(f(a))))$ (que representa $2 \times 2 = 4$).*

- $C_2, G$ *dan* $R_1 =$
  $\neg p(f(a), f(f(a)), z') \vee \neg q(f(f(a)), z', x_0) \vee res(x_0)$
- $C_2, R_1$ *dan* $R_2 =$
  $\neg p(a, f(f(a)), z'_2) \vee \neg q(f(f(a)), z'_2, z') \vee \neg q(f(f(a)), z', x_0) \vee res(x_0)$
- $C_1, R_2$ *dan* $R_3 =$
  $\neg q(f(f(a)), a, z') \vee \neg q(f(f(a)), z', x_0) \vee res(x_0)$
- $C_4, R_3$ *dan* $R_4 =$
  $\neg q(f(a), a, z_4) \vee \neg q(f(f(a)), f(z_4), x_0) \vee res(x_0)$
- $C_4, R_4$ *dan* $R_5 =$
  $\neg q(a, a, z_5) \vee \neg q(f(f(a)), f(f(z_5)), x_0) \vee res(x_0)$
- $C_3, R_5$ *dan* $R_6 =$
  $\neg q(f(f(a)), f(f(a)), x_0) \vee res(x_0)$
- $C_4, R_6$ *dan* $R_7 =$
  $\neg q(f(a), f(f(a)), z_7) \vee res(f(z_7))$
- $C_4, R_7$ *dan* $R_8 =$
  $\neg q(a, f(f(a)), z_8) \vee res(f(f(z_8)))$
- $C_3, R_8$ *dan* $R_9 =$
  $res(f(f(f(f(a)))))$

**Ejercicio 187** *Dado el siguiente conjunto de cláusulas:*

$C_1$: $\neg r(x)$
$C_2$: $p(y) \vee \neg s(y, h(y)) \vee r(y)$
$C_3$: $\neg s(z, x)$
$C_4$: $\neg p(f(g(z))) \vee s(b, h(c)) \vee s(f(g(z)), g(z))$
$C_5$: $p(x) \vee r(y) \vee \neg q(h(x))$
$C_6$: $\neg s(x, x) \vee r(a)$
$C_7$: $s(f(z), z) \vee \neg p(f(z))$
$C_8$: $s(a, f(c)) \vee p(g(x)) \vee r(z)$

1. *demostrar que a partir del conjunto se puede deducir* $\exists z(\neg q(z) \wedge \neg r(z))$, en dos pasos*:*
   (a) *identificar las cláusulas tautológicas (marcar con una T); las cláusulas con literales puros (marcar con una P); las cláusulas incorporantes (marcar con una I y especificar la cláusula que se incorpora), y eliminarlas;*
   (b) *aplicar resolución con UMG a las cláusulas que quedan (escribir las sustituciones obtenidas en cada paso);*
2. *utilizar las técnicas conocidas para hallar el valor de* $z$ *que hace posible la afirmación del punto 1;*
3. *la derivación obtenida en el punto 1 (a) ¿es ordenada? (b) ¿es input? (c) ¿es dirigida? en los tres casos justificar* adecuadamente *la respuesta.*

**Solución 31** *Primera observación importante: como ya desde el principio se sabe lo que hay que demostrar* ($D = \exists z(\neg q(z) \wedge \neg r(z))$)*, hay que incluir la conclusion en el conjunto de cláusulas. Esto se hace sacando la forma clausular de la negación de* $D$*, que es* $C_9 = q(z) \vee r(z)$*. En lo que sigue,* $C_9$ *es una cláusula de input más, que se trata exactamente como las demás.*

1. (a) *no hay cláusulas tautológicas;*
   - $C_2$ *contiene el literal puro* $\neg s(y, h(y))$*;*
   - $C_6$ *contiene el literal puro* $\neg s(x, x)$*;*
   - $C_8$ *contiene el literal puro* $p(g(x))$*;*
   - $C_4$ *incorpora* $C_7$*:* $C_4 = C_7\alpha \vee s(b, h(c))$*, donde* $\alpha = \{z_7/f(z_4)\}$ *(renombrando* $z$ *con* $z_4$ *o* $z_7$ *cuándo haga falta)*

   *por lo tanto, se pueden eliminar del conjunto las cláusulas* $C_2$*,* $C_4$*,* $C_6$*,* $C_8$*;*

   (b) *una posible resolución (lineal) es la siguiente (es razonable partir de* $C_9$ *porque sabemos que, si* $C_9$ *es la cláusula que hace el conjunto insatisfacible - y es probable, ya que su negación* $D$ *es el resultado a demostrar - entonces existe una refutación lineal que empieza por ella):*

$$\begin{array}{lclcll}
C_1,\ C_9 & \rightarrow & C_{10} & = & q(z) & \{\ x_1/z_9\ \} \\
C_{10},\ C_5 & \rightarrow & C_{11} & = & p(x) \vee r(y) & \{\ z_{10}/h(x_5)\ \} \\
C_{11},\ C_1 & \rightarrow & C_{12} & = & p(x) & \{\ x_1/y_{11}\ \} \\
C_{12},\ C_7 & \rightarrow & C_{13} & = & s(f(z), z) & \{\ x_{12}/f(z_7)\ \} \\
C_{13},\ C_3 & \rightarrow & C_{14} & = & \square & \{\ z_3/f(z_{13}),\ x_3/z_{13}\ \}
\end{array}$$

   *donde se han renombrado las variables* antes *y* después *de dar el paso de resolución (como siempre decimos, renombrar no cuesta nada):*
   - *antes del paso de resolución se aplica a la cláusula* $C_i$ *el renombrado* $\{x/x_i, y/y_i, z/z_i\}$*;*
   - *después del paso de resolución, se quitan todos los números de los nombres de las variables del resolvente, aplicando el renombrado* $\{x_i/x, y_j/y, z_k/z\}$ *para todo* $i$*,* $j$*,* $k$ *(se puede hacer porque nunca se genera un resolvente donde aparecen dos "xs" ni dos "ys" ni dos "zs" distintas);*
2. *partiendo de la derivación anterior:* $C_9$ *se convierte en* $q(z) \vee r(z) \vee resp(z)$

$$\begin{array}{lclcll}
C_1,\ C_9 & \rightarrow & C_{10} & = & q(z) \vee resp(z) & \{\ x_1/z_9\ \} \\
C_{10},\ C_5 & \rightarrow & C_{11} & = & p(x) \vee r(y) \vee resp(h(x)) & \{\ z_{10}/h(x_5)\ \} \\
C_{11},\ C_1 & \rightarrow & C_{12} & = & p(x) \vee resp(h(x)) & \{\ x_1/y_{11}\ \} \\
C_{12},\ C_7 & \rightarrow & C_{13} & = & s(f(z), z) \vee resp(h(f(z))) & \{\ x_{12}/f(z_7)\ \} \\
C_{13},\ C_3 & \rightarrow & C_{14} & = & resp(h(f(z))) & \{\ z_3/f(z_{13},\ x_3/z_{13}\ \}
\end{array}$$

   *por lo tanto la respuesta es:* $h(f(z))$ *(para todo* $z$*); quiere decir que hay muchas respuestas que se pueden obtener reemplazando* $z$ *con términos; se note que, generando derivaciones distintas, se puede sacar una respuesta diferente (por ejemplo* $h(f(g(z)))$*), menos general, y en este contexto no sería un error (aunque sí supondría un resolutado no optimal);*
3. *las respuestas a esta pregunta dependen de la derivación obtenida más arriba: en el caso de la derivación anterior, las respuestas son las siguientes: la derivación*
   - *no es ordenada porque en el primer paso* $r(z)$ *no es el primer literal de* $C_9$*, si no el segundo;*
   - *es input porque en cada paso aparece una cláusula del conjunto* $\{C_1, .., C_9\}$*;*
   - *puede ser dirigida, si el conjunto soporte es, por ejemplo,* $\{C_1, .., C_8\}$*, porque en cada paso se usa al menos una cláusula que no está en este conjunto; de todas formas, se note que puede no ser dirigida si se elige otro conjunto soporte (por ejemplo,* $\{C_1, C_9\}$*; la mejor respuesta a esta pregunta es especificar que ambas cosas pueden pasar, y proporcionar ejemplos.*

**Ejercicio 188 (02/2008)** *Dado el siguiente conjunto de cláusulas:*

$$\begin{array}{l} C_1 : A(x) \vee \neg B(g(x)) \vee C(x) \\ C_2 : \neg C(x) \\ C_3 : A(x) \vee C(x) \vee \neg D(x, g(x)) \\ C_4 : C(x) \vee \neg D(x, y) \\ C_5 : B(x) \vee C(x) \\ C_6 : \neg A(f(x)) \vee D(f(x), x) \end{array}$$

*(a) Demostrar que es insatisfacible unsando resolución. (b) La refutación que se ha obtenido ¿es lineal? ¿es input? ¿qué condición la haría dirigida? Justificar las respuestas.*

**Ejercicio 189 (02/2006)** *Dado el siguiente conjunto de cláusulas:*

$$\begin{array}{l} C_1 : \neg P(x) \vee Q(x) \vee \neg R(x, y) \\ C_2 : \neg D(x) \vee \neg Q(y) \vee \neg R(x, y) \\ C_3 : \neg D(x) \vee P(x) \\ C_4 : D(f(x)) \\ C_5 : D(a) \\ C_6 : R(x, f(x)) \end{array}$$

*(a) Demostrar que es insatisfacible unsando resolución. (b) La refutación que se ha obtenido ¿es lineal? ¿es input? ¿qué condición la haría dirigida? Justificar las respuestas.*

**Ejercicio 190 (06/2006)** *Dado el siguiente conjunto de cláusulas:*

$$\begin{array}{l} C_1 : N(x, y, z) \vee \neg N(u, y, v) \vee \neg N(x, w, u) \vee \neg N(w, z, v) \\ C_2 : N(x, y, z) \vee \neg N(u, y, v) \vee \neg N(u, x, w) \vee \neg N(w, v, z) \\ C_3 : N(a, x, x) \\ C_4 : N(x, a, f(x)) \\ C_5 : N(f(x), a, x) \\ C_6 : \neg N(b, a, b) \end{array}$$

1. *definir un conjunto soporte tal que la resolución dirigida sea completa para este conjunto; justificar por qué;*
2. *decir si el conjunto inicial es satisfacible usando resolución dirigida; justificar.*

**Ejercicio 191 (02/2007)** *Dado el siguiente conjunto de cláusulas*

$$\begin{array}{l} C_1 : \neg C(x) \vee D(x) \vee B(x, g(x)) \\ C_2 : \neg C(x) \vee D(x) \vee E(g(x)) \\ C_3 : \neg B(a, y) \vee A(y) \\ C_4 : \neg A(x) \vee \neg E(x) \\ C_5 : \neg A(f(y)) \vee \neg D(y) \\ C_6 : C(a) \end{array}$$

*Demostrar por resolución que la estructura deductiva*

$$[C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6] \vdash \exists x \neg A(f(x)) \wedge \exists y \neg A(y)$$

*Es correcta y justificar por qué.*

**Ejercicio 192 (09/2008)** *Demostrar, por resolución, que el siguiente conjunto es insatisfacible:*

$$\begin{array}{l} C_1 : \neg P(f(b)) \vee \neg P(y) \vee Q(y) \\ C_2 : R(z, g(z)) \\ C_3 : \neg R(a, x) \vee \neg Q(x) \\ C_4 : P(u) \end{array}$$

**Ejercicio 193 (07/2009)** *Marcar con una X los enunciados correctos y para los que no lo sean introducir la corrección sobre el mismo enunciado:*

1. *una fórmula es insatisfacible si y sólo si existe un conjunto de instancias básicas de cláusulas de la fórmula que es insatisfacible;*

2. *una fórmula es insatisfacible si y sólo si no tiene contramodelos;*
3. *un conjunto de cláusulas es insatisfacible si y sólo si se puede deducir de él la cláusula vacía por resolución input lineal;*
4. *un modelo de Herbrand es suficiente para demostrar que una fórmula es satisfacible;*
5. *una fórmula es insatisfacible si y sólo si su árbol semántico asociado es finito al no tener en cuenta los nodos descendientes de los nodos fallo.*

**Solución 32** – *"conjunto" → "conjunto finito"*
- *"contramodelos" → "modelos"*
- *tachar el "input"*
- *OK*
- *"su árbol semántico asociado es finito" → "su árbol semántico asociado es cerrado y finito"*

**Ejercicio 194 (07/2009)** *Demuestre, empleando resolución con UMG y especificando en cada paso de resolución el UMG empleado, que la fórmula $\forall z \exists x \exists y (A(f(x), y, h(z, b)) \wedge B(g(y, f(x))))$ se deduce del siguiente conjunto de cláusulas:*

$$\begin{array}{l} C_1 : A(x, y, h(y, z)) \vee \neg C(z, x) \vee \neg D(f(z), u) \\ C_2 : C(b, x) \vee \neg D(x, y) \\ C_3 : D(x, x) \\ C_4 : B(g(x, f(x)) \\ C_5 : B(g(x, f(y)) \\ C_6 : \neg D(x, f(x)) \end{array}$$

*Con respecto a la refutación realizada anteriormente, responda razonadamente a las siguientes preguntas: ¿es lineal dicha refutación?, ¿es dirigida dicha refutación?*

**Ejercicio 195 (06/2010)** 1. *Demostrar que $\forall x \exists y (p(x, y) \rightarrow \exists z t(y, g(g(z))))$ se deduce del siguiente conjunto C de cláusulas:*

$$\begin{array}{l} C_1 : \neg p(x, y) \vee q(y, x) \vee t(x, g(y)) \\ C_2 : r(y) \vee t(g(x), c) \vee \neg p(g(x), y) \\ C_3 : r(y) \vee \neg p(x, y) \\ C_4 : \neg s(y) \vee \neg q(g(a), y) \\ C_5 : \neg r(g(y)) \vee s(y) \\ C_6 : \neg t(z, g(c)) \vee \neg p(x, c) \end{array}$$

*Para demostrar el resultado*
- *aplicar la regla de la eliminación de literales puros (tachar arriba lo que hay que eliminar)*
- *emplear resolución con UMG sobre el resultado del punto anterior, especificando en cada paso de resolución el UMG empleado*

2. *La derivación obtenida ¿es input? ¿es lineal? Justificar la respuesta.*
3. *Si se especificara $\{C_2, C_3, C_4\}$ como conjunto soporte, la derivación ¿sería dirigida? Justificar la respuesta.*
4. *Este mismo conjunto soporte $\{C_2, C_3, C_4\}$, ¿cumple la condición de completitud para la resolución dirigida? Justificar la respuesta.*

**Ejercicio 196 (06/2010)** *Factorizar la siguiente cláusula:*

$$q(x, f(g(x))) \vee \neg r(y, x) \vee q(y, f(g(h(x)))) \vee q(w, f(g(h(z))))$$